22

317

ANNALES

DE

RADIOÉLECTRICITÉ

GROUPE DE LA COMPAGNIE GÉNÉRALE DE T.S.F.

79, Boulevard Haussmann, 79

PARIS

REVUE TRIMESTRIELLE

TOME X. JANVIER 1955. N° 39.

TOME X JANVIER 1955 N° 39

ANNALES
DE
RADIOÉLECTRICITÉ

GROUPE DE LA COMPAGNIE GÉNÉRALE DE T. S. F.

COMPAGNIES FRANÇAISES

COMPAGNIE GÉNÉRALE DE TÉLÉGRAPHIE SANS FIL (CSF)
SOCIÉTÉ FRANÇAISE RADIOÉLECTRIQUE (SFR)
RADIO-FRANCE (RF)
RADIO-ORIENT (RO)
COMPAGNIE RADIO-MARITIME (CRM)
COMPAGNIE D'APPLICATIONS MÉCANIQUES A L'ÉLECTRONIQUE,
AU CINÉMA ET A L'ATOMISTIQUE (CAMECA)
SOCIÉTÉ DE TRAITEMENTS ÉLECTROLYTIQUES ET ÉLECTROTHERMIQUES (STEL)
SOCIÉTÉ FRANÇAISE RADIOÉLECTRIQUE-AFRIQUE (SFRA)
SOCIÉTÉ ANONYME LE CONDENSATEUR CÉRAMIQUE (LCC)
COMPAGNIE INDUSTRIELLE DES MÉTAUX ÉLECTRONIQUES (CIME)
COMPAGNIE INDUSTRIELLE DES CÉRAMIQUES ÉLECTRONIQUES (CICE)

79, Boulevard Haussmann, PARIS

SOMMAIRE

Rédacteur scientifique : M. Robert WARNECKE

Prière d'adresser toute correspondance à la Compagnie Générale de T. S. F., Centre d'Information et de Documentation, 10, rue Carducci, Paris (19e).

QUELQUES PROBLÈMES DE FLUCTUATION EN RADIOÉLECTRICITÉ

PAR J. C. SIMON,

Département « Recherches générales » du Centre de Recherches Techniques de la Compagnie Générale de T. S. F.

SOMMAIRE. — *Le point de vue statistique permet de donner des solutions simples à un grand nombre de problèmes en Radioélectricité. L'étude d'une somme de vecteurs dont les phases sont aléatoires peut s'appliquer à de nombreux cas. Cette étude est exposée dans une première partie théorique. La notion de fonction de corrélation appliquée à ce problème est examinée en détail. La seconde partie traite de différents cas d'applications pratiques, réflexions multiples sur une ligne de transmission, problèmes de propagation, influence d'échos répartis, rayonnement d'un grand nombre de sources, fluctuation d'un écho de Radar, influence d'erreurs de phase sur les caractéristiques d'un aérien.* (C.D.U. : 519.2 : 621.396.)

SUMMARY. — *The statistical approach enables simple solutions to be given to a great number of problems in the field of Radioelectricity. Many of these are related to the study of the sum of vectors, the phase angles of which are at random. This study is undertaken in a first theoretical part. The correlation function concept applied to this problem is studied with details. The second part gives different practical applications such as multiple reflections on a transmission line, propagation problems, influence of scattered echoes, radiation of a great number of sources, fluctuations of a Radar echo, effect of phase error on antenna performances.* (U.D.C. : 519.2 : 621.396.)

INTRODUCTION.

L'étude de problèmes de bruit de fond a amené l'ingénieur radioélectricien à s'intéresser au calcul des probabilités. Mais ce n'est pas là le seul cas où cette discipline peut trouver une application fructueuse. De nombreux autres problèmes importants peuvent se traiter du point de vue statistique.

Soit que les différents paramètres obéissent à des lois stochastiques, soit que ces paramètres soient en grand nombre et partiellement inconnus, il permet de donner des « solutions *a priori* » souvent d'un vif intérêt pour l'expérimentateur.

Beaucoup de ces applications relèvent de la solution d'un même problème, celui de l'étude de la somme d'un grand nombre de vecteurs dont les amplitudes sont constantes mais dont les phases sont aléatoires.

Ce problème a été envisagé pour la première fois en Physique par Lord Rayleigh [1], lorsqu'il s'est intéressé à l'effet d'une multitude de sources incohérentes. Depuis, bien d'autres domaines de la Physique ont eu à utiliser des solutions de ce problème. Par exemple les colloïdes, la diffusion, le mouvement brownien, la physique stellaire, l'économie scientifique, etc. [2].

Cet article a pour but de l'exposer et de le rendre familier à des radioélectriciens. Dans une première partie, la théorie sera établie en insistant particulièrement sur la notion de fonction de corrélation, qui permet de donner d'importantes indications à différents problèmes des fluctuations. La seconde partie est consacrée à des applications : réflexions multiples sur une ligne de transmission, problème de propagation, influence d'échos répartis, rayonnement d'un grand nombre de sources, fluctuations d'un écho de radar, influence d'erreur de phase sur les caractéristiques d'un aérien. Bien d'autres applications peuvent être envisagées, par exemple dans le domaine des filtres ou amplificateurs. Les exemples traités devraient permettre au lecteur de se familiariser avec le point de vue statistique.

S'il est plus attiré par la Physique que par les Mathématiques, il peut n'effectuer qu'une lecture rapide de la première partie et en retenir les résultats essentiels à la lecture des exemples d'application.

PREMIÈRE PARTIE.

1.1. Loi de probabilité d'une somme de vecteurs.

Soit une somme de n vecteurs dans un milieu à deux dimensions. Ces vecteurs, de module a_k, font avec une direction Ox des angles φ_k. Les modules a_k, ainsi que le nombre n sont fixés à l'avance mais les angles φ_k sont répartis au hasard. La probabilité que le module de la somme de ces vecteurs soit supérieur à r est désignée par $P(r)$ et compris entre r et $r + \mathrm{d}r$ par $p(r)$. Il vient évidemment

$$P(r) = 1 - \int_0^r p(r)\,dr. \tag{1}$$

Pour rechercher $p(r)$ le théorème suivant est utilisé :

Si les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont indépendantes et *ont pour fonctions caractéristiques* $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$, *la variable aléatoire* $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ *a pour fonction caractéristique* $\psi = \psi_1\psi_2 \ldots \psi_n$.

Ce théorème est valable non seulement pour des variables aléatoires à une variable mais également pour un nombre quelconque de variables. Les fonctions caractéristiques sont définies par la transformation de Fourier généralisée.

Dans le cas envisagé, le problème est à deux dimensions. Soit M l'extrémité du vecteur de longueur a et de phase φ quelconque. Si $p'(M)$ est la densité de probabilité du point M dans le plan, il vient naturellement

$$p(r) = 2\pi r p'(M). \tag{2}$$

Au point M et à la fonction $p'(M)$ faisons correspondre un point P et une fonction $\psi'(P)$ telle que

$$\psi'(P) = \iint e^{i\,\mathbf{OP}.\mathbf{OM}}\, p'(M)\,\mathrm{d}M. \tag{3}$$

$\psi'(P)$ est la fonction caractéristique de la densité $p'(M)$. Si $\psi'(P)$ est connu, $p'(M)$ est donné par

$$p'(M) = \frac{1}{(2\pi)^2}\iint e^{-i\,\mathbf{OP}.\mathbf{OM}}\,\psi'(P)\,\mathrm{d}P. \tag{4}$$

Soient r et φ les coordonnées polaires de M, ρ et θ celles de P,

$$\psi'(P) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{ir\rho\cos(\varphi-\theta)}\, p'(r, \varphi)\, r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r.$$

En effectuant l'intégration en r et en se souvenant que par définition,

$$\iint p'(M)\,\mathrm{d}M = 1,$$

il vient

$$\psi'(P) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ia\rho\cos(\varphi-\theta)}\,d\varphi,$$

donc

$$\psi'(P) = J_0(a\rho). \tag{5}$$

L'application du théorème des fonctions caractéristiques donne donc pour fonction caractéristique de la loi de probabilité d'une somme de n vecteurs d'amplitude a_k et de phase φ_k aléatoire,

$$\psi'_n(P) = \prod_{k=1}^{k=n} J_0(a_k\rho). \tag{6}$$

L'application de la formule (4) donne, après intégration en θ,

$$p'_n(M) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} J_0(r\rho)\prod_1^n J_0(a_k\rho)\,\rho\,\mathrm{d}\rho.$$

D'où, pour $p_n(r)$, fonction cherchée :

$$p_n(r) = \int_0^{\infty} r\rho\, J_0(r\rho)\prod_1^n J_0(a_k\rho)\,d\rho. \tag{7}$$

Pour $P_n(r)$ l'application de (1) donne

$$P_n(r) = 1 - \int_0^{\infty} rJ_1(r\rho)\prod_1^n J_0(a_k\rho)\,\mathrm{d}\rho. \tag{8}$$

Ces formules peuvent s'établir directement (*cf.* [4], p. 419). Mais l'utilisation de fonctions caractéristiques simplifie beaucoup la démonstration.

Il a été démontré (*cf.* [4], p. 413), ceci indépendamment du problème envisagé ici, que l'intégrale de la formule (7) est nulle si $r > \Sigma a_k$.

1.1.1. Cas de deux vecteurs.

— Soient a_1 et a_2 les mesures des deux vecteurs considérés ($a_2 > a_1$). La formule (8) devient

$$\frac{1 - P(r)}{r} = \int_0^{\infty} J_1(r\rho)J_0(a_1\rho)J_0(a_2\rho)\,\mathrm{d}\rho. \tag{9}$$

Or, l'intégrale de la formule (9) a déjà été calculée

(*cf.* [4], p. 411). Le résultat pour $P(r)$ est le suivant :

$$r < a_1 - a_2, \qquad P(r) = 1;$$

$$a_1 - a_2 < r < a_1 + a_2, \qquad P(r) = 1 - \frac{1}{\pi} \operatorname{arc\,cos} \frac{a_1^2 + a_2^2 - r^2}{2 a_1 a_2};$$

$$r > a_1 + a_2, \qquad P(r) = 0.$$

La fonction $P(r)$ est représentée sur la figure 1.

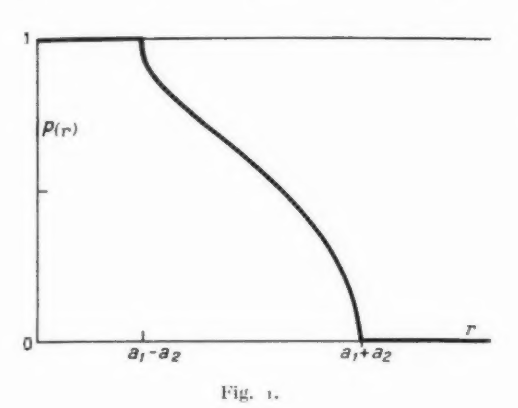


Fig. 1.

1.1.2. Cas de n vecteurs égaux. — Soit a la mesure de ces vecteurs. Les formules (7) et (8) deviennent

$$p_n(r) = r \int_0^\infty \rho J_0(r\rho) J_0^n(a\rho)\, d\rho, \tag{10}$$

$$P_n(r) = 1 - r \int_0^\infty J_1(r\rho) J_0^n(a\rho)\, d\rho. \tag{11}$$

La formule (10) a été calculée dans le cas de $n = 2$ et 3 (*cf.* [3]), mais il faut se résoudre à des intégrations graphiques pour $n > 3$.

La figure 2 représente $P_n(r)$, r est porté en abscisse, en décibels, la valeur zéro est adoptée pour $r = \sqrt{\Sigma a_k^2}$. Les différentes courbes sont tracées en fonction de n, nombre de vecteurs indépendants égaux. Dans la partie centrale, les courbes sont pratiquement confondues dès $n = 4$. Il n'en est plus de même si P est voisin de 0 ou 1.

1.1.3. Cas d'un grand nombre de vecteurs. — Soit un grand nombre de vecteurs *d'amplitudes comparables,* mais de phases aléatoires.

Pour n grand il est possible d'écrire

$$\prod_1^n J_0(a_k \rho) \simeq \exp\left[-\frac{\rho^2}{4} \sum_1^n a_k^2\right] \tag{12}$$

et la relation (7) devient

$$p_n(r) = r \int_0^\infty \exp\left[-\frac{\rho^2}{4} \sum a_k^2\right] J_0(r\rho)\rho\, d\rho. \tag{13}$$

Or, l'intégrale de la formule (13) a été calculée (*cf.* [4], p. 393). Il vient

$$p_n(r) = \frac{2r}{\Sigma a_k^2} \exp\left[-\frac{r^2}{\Sigma a_k^2}\right] \tag{14}$$

et

$$P_n(r) = \exp\left[-\frac{r^2}{\Sigma a_k^2}\right]. \tag{15}$$

Les formules (14) et (15) sont valables dans la mesure où l'est la formule (12). Le fait de trouver une loi de Gauss pour la répartition est une conséquence de ce qui est parfois appelé la loi des grands nombres. La loi de probabilité de la somme d'un grand nombre de variables aléatoires indépendantes tend à la limite vers une loi de Gauss.

Il est d'ailleurs aisé de se rendre compte que la loi indiquée n'est qu'une approximation, puisque $p_n(r) \neq 0$ pour $r > \Sigma a_k$.

La loi $P(r)$ est représentée sur les figures 2 et 3.

La loi indiquée porte souvent le nom de loi de Rayleigh. C'est, en effet, Lord Rayleigh qui le premier l'a démontrée et utilisée (*cf.* [1]).

1.1.4. Cas de la somme d'un grand nombre de vecteurs et d'un vecteur grand par rapport a ces derniers. — Soient un vecteur d'amplitude a et un grand nombre de vecteurs d'amplitudes a_k comparables, petites par rapport à a. Les phases de ces vecteurs sont quelconques. Quelle est la loi de probabilité de l'amplitude de la somme de ces différents vecteurs ?

Soit $m = \frac{a^2}{\Sigma a_k^2}$. En utilisant l'approximation de la formule (12), il vient

$$p_m(r) = r \int_0^\infty \exp\left[-\frac{\rho^2}{4} \Sigma a_k^2\right] J_0(a\rho) J_0(r\rho)\rho\, d\rho. \tag{16}$$

L'intégrale de la formule (16) a également été calculée (*cf.* [4], p. 395),

$$p_m(r) = \frac{2r}{\Sigma a_k^2} \exp\left[-\frac{r^2 + a^2}{\Sigma a_k^2}\right] I_0\left(\frac{2ar}{\Sigma a_k^2}\right), \tag{17}$$

avec

$$I_0(z) = J_0(iz).$$

La figure 3 représente $P_m(r)$, r est porté en abscisse en décibels. Le point zéro correspond à la valeur $r = \sqrt{a^2 + \Sigma a_k^2}$. Les différentes courbes sont tracées en fonction du paramètre m. Lorsque m augmente, la variation de P devient plus rapide.

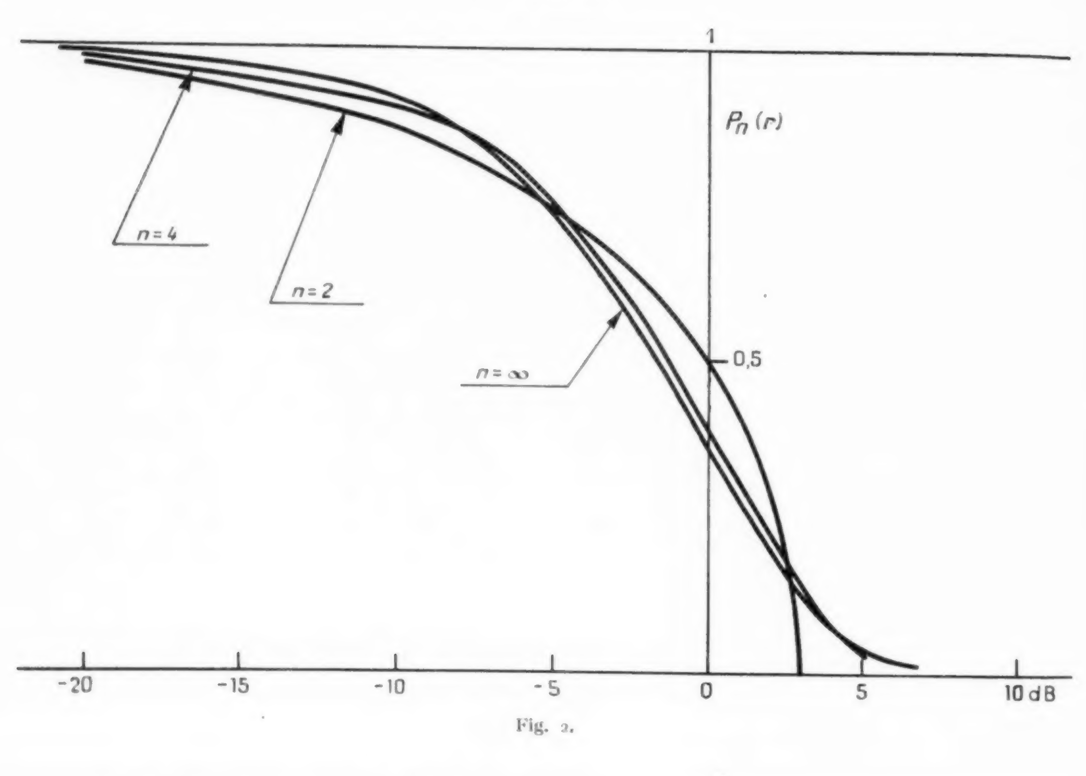

1
$P_n(r)$
n = 4
n = 2
n = ∞
0,5
-20
-15
-10
-5
0
5
10 dB

Fig. 2.

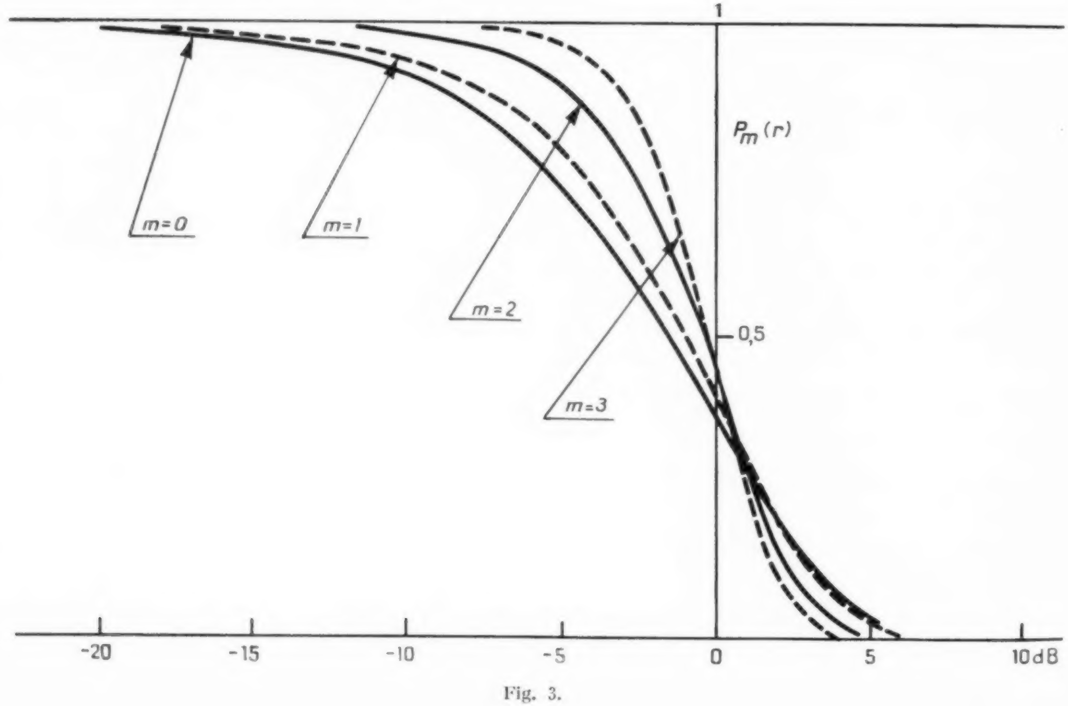

1
$P_m(r)$
m = 0
m = 1
m = 2
m = 3
0,5
-20
-15
-10
-5
0
5
10 dB

Fig. 3.

1.2. Étude de la corrélation.

1.2.1. Les différentes quantités envisagées dépendent en général d'un ou plusieurs paramètres. La probabilité $P_1(x, t)$ d'un événement n'est alors qu'une partie de l'information cherchée. Elle ne permet pas de connaître la variation de la quantité cherchée en fonction du paramètre t.

Par contre, la fonction aléatoire $P_2(x_1, t_1, x_2, t_2)$ probabilité pour que la variable aléatoire X prenne les valeurs x_1 et x_2 pour les valeurs t_1 et t_2 du paramètre, permet d'obtenir complètement ce renseignement.

Le plus souvent, la connaissance complète de P_2 n'est pas nécessaire pour « se faire une idée » sur la vitesse de variation de la variable aléatoire en fonction de t. Il suffit de connaître la valeur moyenne $\overline{X_1X_2}$ du produit X_1X_2, appelée aussi le moment du premier ordre de cette loi de probabilité. Cette valeur moyenne « renseigne » sur P_2 comme la valeur moyenne $\overline{X}$ renseigne sur P_1.

En général la fonction P_1 ne dépend pas de t. *Le phénomène est dit « stationnaire » au sens statistique.*

Dans ces conditions, P_2 et $\overline{X_1X_2}$ ne dépendent que de la différence

$$\tau = t_2 - t_1 \qquad (t_2 > t_1).$$

C'est le cas désormais envisagé.

Soient $\overline{X} = 0$, $\overline{X^2} = 1$, la fonction $\rho = \overline{X_1X_2}$ est appelée *fonction de corrélation*.

Si les événements sont indépendants de t, il vient

$$\overline{X_1X_2} = \overline{X_1}.\overline{X_2} = 0.$$

C'est le cas en général si τ tend vers l'infini.

Si τ tend vers zéro $\overline{X_1X_2}$ tend vers $\overline{X^2} = 1$.

La valeur de $\rho(\tau)$ comprise entre 0 et 1 donne la mesure de la dépendance de deux mesures séparées par l'intervalle τ dans une même série d'épreuves.

De façon plus générale, $\rho(\tau)$ s'écrit

$$\rho(\tau) = \frac{\overline{(X-\overline{X})(X+\Delta X-\overline{X})}}{\overline{(X-\overline{X})^2}}. \tag{18}$$

$X + \Delta X$ correspond à la valeur $t + \tau$ du paramètre. Ou encore

$$\rho(\tau) - 1 = \frac{\overline{(X-\overline{X})\Delta X}}{\overline{(X-\overline{X})^2}}. \tag{19}$$

L'expression (19) se met sous une forme très simple en « normalisant » la variable aléatoire, c'est-à-dire en supposant $\overline{X} = 0$ et $\overline{X^2} = 1$.

Il vient

$$\overline{X\Delta X} = \rho(\tau) - 1, \tag{20}$$

Pour des valeurs pas trop grandes de τ, l'expression (20) est équivalente à :

$$\overline{\Delta(X)^2} = 2\Delta\rho. \tag{21}$$

Or, fréquemment ρ est une fonction non croissante de τ. Soit τ' la valeur de τ pour laquelle $\Delta\rho = \frac{1}{2}$, donc $\rho = \frac{1}{2}$. La valeur moyenne de la variation de X^2 est alors -1, égale en valeur absolue à la valeur moyenne de X^2.

De même qu'une variable aléatoire est normalisée de façon que $\overline{X} = 0$ et $\overline{X^2} = 1$, il est possible de choisir pour t une échelle telle que τ' soit égal à une valeur donnée. Dans ces conditions toutes les courbes représentant une variable aléatoire ont à première vue, des allures semblables. Il serait possible de parler de « courbes types de fluctuation ».

La figure 4 représente un exemple de relevé expérimental d'une variable aléatoire. X^2 est porté en ordonnée, t en abscisse.

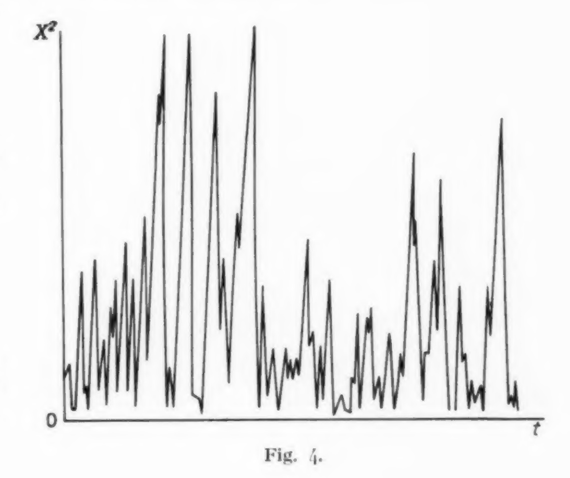


Fig. 4.

1.2.2. Un autre raisonnement permet également de saisir l'intérêt physique de la fonction de corrélation.

Soit une variable aléatoire prenant une valeur indépendante de t pendant un intervalle τ_0, mais changeant au hasard d'un intervalle à l'autre. Dans ces conditions

$$\rho(\tau) = \frac{\tau_0 - \tau}{\tau_0} \qquad \text{si} \quad 0 < \tau < \tau_0.$$

$$\rho(\tau) = 0 \qquad \text{si} \quad \tau > \tau_0.$$

Soit

$$I = \int_0^{\infty} \rho(\tau)\, d\tau. \qquad (22)$$

Il vient évidemment $I = \frac{\tau_0}{2}\cdot$ I donné dans le cas général par la formule (22) est appelé *rayon de corrélation*. Or, dans le cas particulier choisi, τ_0 représente pour un expérimentateur *l'intervalle de temps optimum* pour faire ses mesures, et chaque résultat de mesure est indépendant de tous les autres. *En généralisant à une variable aléatoire quelconque, il est possible de dire que* $2I$, *appelé au cours du texte* diamètre de corrélation, *est l'intervalle optimum pour effectuer des mesures, et que de plus ce diamètre de corrélation* $2I$ *donne la mesure de* t *telle que deux valeurs successives de la variable aléatoire puissent être considérées comme* indépendantes.

Il est à noter que souvent $I = \tau'$ défini plus haut.

L'introduction de telles notions, qui peut troubler le mathématicien, est en fait très utile pour le physicien et l'ingénieur. Le problème se pose souvent de choisir un intervalle de mesure suivant l'axe des t. C'est ce qui est fait par exemple *en fixant la constante de temps de l'appareil de mesure,* ou en représentant un diagramme expérimental sur une feuille de papier. Si l'intervalle ou la constante de temps sont choisis trop petits, il y a un grand nombre de renseignements superflus; trop grands, certains détails essentiels risquent d'échapper.

Le diamètre de corrélation calculé à partir de la formule (22), permet de donner une réponse satisfaisante. Dans la suite du texte il sera représenté par $(\Delta t)_0$ et *il sera admis que deux valeurs de variable aléatoire* X *séparées par* $(\Delta t)_0$ *sont indépendantes.*

1.2.3. Si T est la mesure totale du paramètre intéressant l'expérimentateur, ce dernier aura à exécuter $N = \frac{T}{(\Delta t)_0}$ mesures sur X, dont les résultats seront représentés par N points. La loi de probabilité du phénomène indique le pourcentage de points inférieurs ou supérieurs à une valeur donnée. Il est « raisonnable » de penser qu'*a priori* les valeurs extrêmes possibles de X ne seront pas atteintes.

Ainsi, soit P la probabilité que $X > x$. La probabilité que cet événement ne se produise pas est $1 - P$. Si N tirages *indépendants* sont effectués, la probabilité de n'avoir jamais $X > x$ est donc $P' = (1 - P)^N$. Ou, si P est petit devant l'unité, $P' = e^{-NP}$. Si $N = \frac{1}{P}$ il vient $P' = \frac{1}{e}\cdot$

De façon plus générale, il est possible de donner la probabilité pour que la variable aléatoire X dépasse un certain nombre h de fois une valeur x sur un ensemble de N points. Si P est petit, cette distribution satisfait une loi de Poisson et il vient

$$P'_h = e^{-NP} \frac{(NP)^h}{h\,!}\cdot$$

La fonction P'_h de h, donnée par cette formule, varie différemment suivant la valeur du paramètre NP. Cette fonction n'est évidemment intéressante que pour les valeurs de h entières et positives, ou la valeur nulle.

Si $NP < 1$, P'_h décroît lorsque h augmente en partant de zéro.

Si $NP > 1$, P'_h commence par croître jusqu'à un maximum atteint pour $h = NP$, et décroît ensuite. Ainsi dans ce cas, la probabilité que X dépasse x une ou plusieurs fois est plus grande que la probabilité de ne pas le dépasser.

Il n'en est pas de même dans le cas précédent, où il est d'autant moins probable de dépasser x que h augmente en partant de zéro. Le processus est donc différent suivant que NP est supérieur ou inférieur à l'unité. La frontière est $NP = 1$.

La probabilité que X ne dépasse pas x est P'_0, valeur de P'_h pour $h = 0$. La probabilité pour que X dépasse x est P'', telle que :

$$P'' = 1 - P'_0 \neq \sum_{h=1}^{h=N} P'_h.$$

En particulier si $NP = 1$, $P'_0 = \frac{1}{e}\cdot$ Cette valeur augmente rapidement si NP diminue. La règle pratique suivante peut ainsi être adoptée.

Soient x_1 *et* x_2 *les deux valeurs telles que les probabilités que* $X < x_1$ *ou que* $X > x_2$ *soient toutes deux égales à* $\frac{1}{N}\cdot$ *Il est possible de dire que* X *ne sortira pas de l'intervalle* x_1, x_2 *au cours des* N *tirages indépendants.*

Dans la suite ces valeurs x_1 et x_2 seront adoptées comme « limites raisonnables » de la variable aléatoire X.

1.2.4. Enfin, si t représente le temps, il est aisé de saisir que plus $(\Delta t)_0$ est petit, plus le spectre de la fonction $X(t)$ comprend des composantes de fréquence élevée. En fait, la liaison entre fonction de corrélation et spectre de puissance est très étroite puisqu'il est démontré qu'ils sont transformés de Fourier l'un

de l'autre. En effet, d'après le théorème de Wiener-Kintchine, il est possible d'écrire

$$(23)\qquad \rho(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{|g^2(\omega)|}\, e^{i\omega\tau}\, d\omega,$$

$g(\omega)$ étant défini par

$$g(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} V(t)\, e^{i\omega t}\, dt.$$

Lorsqu'il est question de phénomènes aléatoires, la notion de fonction de corrélation est en général plus directe et plus accessible que celle de spectre de fréquence. C'est ainsi qu'il est souvent plus simple de calculer la fonction de corrélation et d'effectuer la transformation de Fourier pour avoir le spectre, plutôt que d'effectuer le calcul direct.

1.3. **Corrélation d'une somme de vecteurs aléatoires.**

1.3.1. Soient $\mathbf{A} = \Sigma \mathbf{a}$ une somme de vecteurs dont les amplitudes a_k sont invariables, mais dont les phases φ_k sont réparties au hasard et de plus dépendent d'un paramètre t.

Il est connu que

$$A^2 = \Sigma \mathbf{a}_k \Sigma \mathbf{a}_l^*$$

(l'astérique désigne la quantité imaginaire conjuguée).

Soit $\mathbf{a}'_k$ le vecteur déduit de $\mathbf{a}_k$ lors d'une variation τ du paramètre t, et α_k la variation correspondante de φ_k.

En supposant le phénomène stationnaire et en appliquant la formule (18), *la fonction de corrélation des puissances est donnée par*

$$(24)\qquad \rho_0(\tau) = \frac{\overline{(\Sigma \mathbf{a}_k \Sigma \mathbf{a}_l^* - \Sigma a_k^2)(\Sigma \mathbf{a}'_m \Sigma \mathbf{a}'^*_n - \Sigma a_k^2)}}{\overline{(\Sigma \mathbf{a}_k \Sigma \mathbf{a}_l^* - \Sigma a_k^2)^2}}.$$

Cette formule se simplifie si les vecteurs $\mathbf{a}_k$ sont en assez grand nombre et comparables entre eux :

$$(25)\qquad \rho_0(\tau) = \frac{\overline{\Sigma \mathbf{a}_k \Sigma \mathbf{a}_l^* \Sigma \mathbf{a}'_m \Sigma \mathbf{a}'^*_n} - (\Sigma a_k^2)^2}{\overline{(\Sigma \mathbf{a}_k \Sigma \mathbf{a}_l^*)^2} - (\Sigma a_k^2)^2},$$

car des expressions telles que $\overline{\Sigma \mathbf{a}_k \Sigma \mathbf{a}_l^*}$ sont égales à Σa_k^2, puisque des produits de la forme $\mathbf{a}_k . \mathbf{a}_l^*$ ont une valeur moyenne nulle si $k \neq l$.

Le numérateur de l'expression (25) se compose de la valeur moyenne d'une somme de produits de la forme

$$\mathbf{a}_k . \mathbf{a}_l^* . \mathbf{a}'_m . \mathbf{a}'^*_n .$$

La valeur moyenne de tels produits est nulle sauf dans deux cas. Le premier est celui où $k = l$ et $m = n$.

La somme de la valeur moyenne de tels termes est alors $(\Sigma a_k^2)^2$.

L'autre cas à considérer est celui où $k = n$ et $m = l$. La somme obtenue peut se mettre sous la forme

$$\overline{\Sigma a_k^2 e^{i\alpha_k} . \Sigma a_k^2 e^{-i\alpha_k}},$$

d'où l'expression de ρ_0,

$$(26)\qquad \rho_0(\tau) = \frac{\overline{|\Sigma a_k^2 e^{i\alpha_k}|^2}}{(\Sigma a_k^2)^2}.$$

Cette formule amène à plusieurs remarques importantes.

a. L'expression obtenue pour $\rho_0(\tau)$ ne dépend que de α_k et de a_k^2 lié à la puissance. Elle est en général facile à calculer.

b. Dans la plupart des applications, α_k ne dépend pas de t. Il vient alors :

$$(26')\qquad \sqrt{\rho_0(\tau)} = \frac{|\Sigma a_k^2 e^{i\alpha_k}|}{\Sigma a_k^2}.$$

Si $a^2(M)$ est la densité en énergie, telle que

$$\int a^2(M)\, dM = 1,$$

la formule (26') s'écrit :

$$(26'')\qquad \sqrt{\rho_0(\tau)} = \left| \int a^2(M)\, e^{i\alpha(M)}\, dM \right|.$$

Cette expression est très fréquemment employée au cours de la deuxième partie.

c. Si les α_k satisfont à une loi statistique stationnaire et si le nombre total des vecteurs est très grand, il est possible d'écrire :

$$(26''')\qquad \sqrt{\rho_0(\tau)} = \frac{|\overline{\Sigma a_k^2 e^{i\alpha_k}}|}{\Sigma a_k^2}.$$

Mais ce n'est pas possible si le nombre total n'est pas grand, car en général,

$$\overline{|\Sigma a_k^2 e^{i\alpha_k}|^2} > |\overline{\Sigma a_k^2 e^{i\alpha_k}}|^2.$$

On comprend ainsi comment $\rho_0(\tau)$ rejoint l'unité lorsque le nombre de vecteurs décroît jusqu'à un.

d. Si tous les α_k sont égaux, tout se passe comme s'il y avait un seul vecteur, $\rho_0(\tau) = 1$.

e. Enfin, la formule (26) est encore valable dans le cas où, non seulement les phases mais également les amplitudes varient, à condition que Σa_k^2 reste constant lorsque le paramètre t varie.

1.3.2 L'expression (26) a été obtenue en supposant que les phases des différents vecteurs étaient aléatoires.

Que devient l'expression (24) dans le cas où une partie des vecteurs a une phase fixe ? Ceci revient à considérer la somme d'un vecteur **a** de phase et d'amplitude fixe et de vecteurs $\mathbf{a}_k$ de phases aléatoires et d'amplitudes fixes.

Soit

$$m = \frac{a^2}{\Sigma a_k^2}.$$

Il vient

$$\rho_m(\tau) = \frac{\overline{\Sigma a_k^2 e^{i\alpha_k} . \Sigma a_k^2 e^{-i\alpha_k}} + a^2 \left[\overline{\Sigma a_k^2 e^{i\alpha_k} + \Sigma a_k^2 e^{-i\alpha_k}} \right]}{(\Sigma a_k^2)^2 + 2a^2 \Sigma a_k^2}$$

ou encore

$$(27) \qquad \rho_m(\tau) = \frac{\rho_0(\tau) + 2m \dfrac{Re\left[\overline{\Sigma a_k^2 e^{i\alpha_k}}\right]}{\Sigma a_k^2}}{1 + 2m}$$

Si la répartition de α_k a une valeur moyenne nulle, l'expression (27) se simplifie encore et devient

$$(28) \qquad \rho_m(\tau) = \frac{\rho_0(\tau) + 2m\sqrt{\rho_0(\tau)}}{1 + 2m}.$$

Ce cas est souvent réalisé dans le cas où le paramètre t est un temps; les valeurs de φ_k fluctuent autour d'une valeur moyenne fixe. Il en est autrement en général si le paramètre est une fréquence ou une distance; l'expression (27) est alors la seule correcte pour ρ_m (τ).

DEUXIÈME PARTIE.

2.1. Réflexions sur une ligne de transmission.

Soit une ligne de transmission suivant l'axe des x, λ_g, la longueur d'onde sur la ligne, λ, la longueur d'onde dans l'air. Il existe des obstacles localisés et répartis entre x_1 et x_2 (*fig.* 5). La connaissance

Fig. 5.

exacte de la valeur et de la position des obstacles permet bien entendu de faire le calcul exact du coefficient de réflexion mesuré en O. Il est toutefois très intéressant de pouvoir donner des ***règles générales*** sur le coefficient de réflexion, ou le taux d'ondes stationnaires mesuré en O, en utilisant des données sur les positions beaucoup plus imprécises.

Pour joindre une lampe d'émission à une antenne par exemple, il faut assembler un certain nombre d'éléments de lignes. Ces lignes comportent des transitions guides à coaxial, des coudes, des changeurs de polarisation, etc. Chacun de ces éléments présente un coefficient de réflexion. De plus, les brides de jonction amènent également des réflexions. L'ingénieur se pose donc le problème d'assembler tous ces éléments de la meilleure manière possible, au besoin en modifiant la longueur des lignes.

A priori, il est possible de penser que cet ensemble se présente sous la forme d'un certain nombre de coefficients de réflexion de valeurs connues, répartis « au hasard » entre x_1 et x_2. Ou encore, la densité de présence par unité de longueur est uniforme. (Il y a trois ou quatre obstacles par dix λ_g, par exemple). Si, de plus, ***l'énergie réfléchie par chaque obstacle est petite***, il est possible de supposer que le coefficient de réflexion en O est la somme des coefficients de réflexion.

Le problème se ramène ainsi à celui de l'étude d'une somme de vecteurs d'amplitude constante et de phase aléatoire. Car, la phase dans ce problème s'exprime en fonction de la position relative de l'obstacle par rapport à O.

L'application de la théorie générale donne les résultats suivants :

Soit r_k la valeur du module du coefficient de réflexion de l'obstacle de rang k, R celui mesuré en O, τ_k et τ_i les taux d'ondes stationnaires (T. O. S.) correspondants,

$$\tau_i = \frac{1 + R}{1 - R}.$$

La probabilité pour que $R > r$ est donnée par la courbe de la figure 2 dans laquelle

$$R_0^2 = \sum_1^n r_k^2.$$

Si n est grand, la probabilité d'avoir $R = \Sigma r_k$ est faible. En particulier, si tous les r_k sont égaux cette probabilité est voisine de $\exp(-n)$.

C'est un fait bien connu qu'il est d'autant plus rare d'avoir le T. O. S. maximum que le nombre d'obstacles est plus grand.

Le T. O. S. dépend de la fréquence. Supposons que l'on ait à le relever dans une certaine bande. La question se pose de savoir quel est l'espacement optimum en fréquence à choisir pour effectuer les mesures. La notion de diamètre de corrélation permet de donner une réponse. Il est en effet possible de penser, qu'étant donné la disposition au hasard des obstacles, toutes les valeurs possibles du coefficient R peuvent se présenter avec une cadence donnée par la loi

de probabilité. Ceci à condition d'avoir des points indépendants sur la courbe. Mais, précisément le diamètre de corrélation $(\Delta f)_0$ permet d'évaluer l'indépendance des points. Si l'écart de fréquence est supérieur à cette valeur, les deux mesures peuvent être considérées comme indépendantes.

La fonction de corrélation se calcule simplement, en supposant une densité de répartition constante dans l'intervalle x_1, x_2. En effet

$$\varphi = \frac{4\pi x}{\lambda_g} \qquad \text{et} \qquad \alpha = \frac{4\pi x}{c}\,\Delta f\,\frac{\lambda_g}{\lambda},$$

$$(29) \qquad \sqrt{\varphi(\Delta f)} = \frac{1}{x_2 - x_1}\left|\int_{x_1}^{x_2} e^{i\frac{4\pi}{c}\frac{\lambda_g}{\lambda}x\Delta f}\,dx\right|$$

En posant

$$\tau_g = \frac{x_2 - x_1}{c}\,\frac{\lambda_g}{\lambda},$$

τ_g est le temps mis par l'énergie pour se propager de x_1 à x_2.

Il vient

$$(30) \qquad \varphi(\Delta f) = \left(\frac{\sin 2\pi\tau_g\Delta f}{2\pi\tau_g\Delta f}\right)^2$$

et le diamètre de corrélation est donné par

$$(31) \qquad (\Delta f)_0 = \frac{1}{2\tau_g}.$$

Par exemple, si $x_1x_2 = 10$ m, $\frac{\lambda_g}{\lambda} = 1,5$, la formule (31) donne

$$(\Delta f)_0 = 10 \text{ Mc/s}.$$

Si λ_g augmente, comme c'est le cas près de la fréquence de coupure $(\Delta f)_0$ diminue; il faut alors serrer les mesures.

Si f_1 et f_2 sont les bornes de la bande de fréquence considérée, *le nombre N de points de mesures indépendants* est donné par

$$N = \frac{f_2 - f_1}{(\Delta f)_0}.$$

D'autre part, il est peu probable, ainsi qu'il a été vu (*cf.* § 1.2.3), que R sorte de l'intervalle R_1, R_2. R_1 et R_2 sont les valeurs telles que l'événement $R < R_1$ ou $R > R_2$ ait respectivement une probabilité de $\frac{1}{N}$. R_1 et R_2 sont données dans le cas de N grand par

$$(32) \qquad R_2 \# R_0\sqrt{LN},$$

$$(33) \qquad R_1 \# \frac{R_0}{\sqrt{N}}.$$

Il est à remarquer que $R_1 = r$ si tous les obstacles sont égaux. En particulier, la limite supérieure $R_m = \Sigma r_k$ aura des chances d'être atteinte, si les nombres N et e^n sont comparables (n, nombre des obstacles). Il est visible que c'est rarement le cas, dès que n est important.

Un exemple pratique fera comprendre l'application de ces théories.

Soient $n = 20$ obstacles, égaux en module à $r = \frac{1}{50}$ (T. O. S., $\tau_i = 1,04$), répartis sur 10 m de guide $\left(\frac{\lambda_g}{\lambda} = 1,5\right)$, à étudier dans une bande de 500 Mc/s. On a vu que

$$(\Delta f)_0 = 10 \text{ Mc/s}, \qquad \text{donc} \quad N = 50$$

Les différentes valeurs de R_m, R_0, R_1 et R_2 se calculent aisément :

valeur maximum :

$$R_m = \frac{4}{10} \qquad (\text{T. O. S., } \tau_m = 2,3);$$

valeur la plus probable :

$$R_0 = \frac{1}{11} \qquad (\text{T. O. S., } \tau_0 = 1,2);$$

valeur supérieure probable :

$$R_2 = \frac{2}{10} \qquad (\text{T. O. S., } \tau_2 = 1,5).$$

valeur inférieure probable :

$$R_1 = r = \frac{1}{50} \qquad (\text{T. O. S., } \tau_1 = \tau_i = 1,04).$$

Dans la pratique, ces différentes valeurs caractérisent donc bien le problème et permettent d'énoncer des *règles générales*.

a. Les mesures seront effectuées tous les $(\Delta f)_0$. Il est à peu près certain qu'aucune particularité de la courbe n'échappera. Les points intermédiaires seraient comparables à la moyenne de deux points successifs relevés.

b. Si plusieurs mesures dépassent la valeur de R_2 ou τ_2 il est probable qu'un *arrangement particulier* existe. Il est souvent possible de s'en défaire en disposant les obstacles dans un ordre différent ou en modifiant la longueur d'une ou plusieurs portions de ligne.

c. Réciproquement, il serait très difficile de respecter une limite supérieure plus petite que celle donnée par la formule (32), surtout si le nombre de points indépendants est grand.

d. Il est facile de traiter des problèmes en sens inverse. Par exemple, la limite supérieure τ_2 étant donnée, quelle est la bande passante dans laquelle il est raisonnable de penser que le T. O. S. mesuré ne dépassera pas τ_2? Ceci fixe donc la bande passante possible.

2.2. Problèmes de propagation. Influence des échos répartis.

2.2.1. Cas de l'antenne omnidirectionnelle. — Soit à recevoir au point O une émission provenant d'une source lointaine située sur Oz. Soit, de plus, des échos tels que M_k répartis au hasard autour du point O (*fig.* 6).

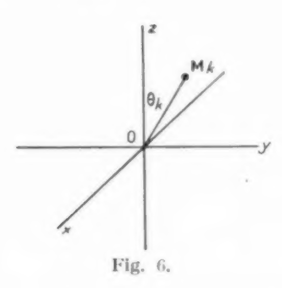


Fig. 6.

Il est normal de supposer que chacun de ces points provoque un rayonnement omnidirectionnel reçu au point O sous la forme d'un champ tel que

$$\mathbf{a}_k = \frac{\mathbf{b}_k}{\sqrt{\rho_k}} e^{\frac{2\pi i}{\lambda}\rho_k} \quad \text{pour le cas à deux dimensions ;}$$

$$\mathbf{a}_k = \frac{\mathbf{b}_k}{\rho_k} e^{\frac{2\pi i}{\lambda}\rho_k} \quad \text{pour le cas à trois dimensions.}$$

Si l'antenne de réception au point O est peu directive, comme c'est le cas par exemple en Radiodiffusion, le signal reçu provient aussi bien de l'onde reçue directement que de celles renvoyées par les échos. Si ceux-ci sont assez forts, il est possible de considérer le signal reçu en O comme une somme de signaux d'amplitudes comparables et de phases aléatoires. La loi de probabilité du signal reçu n'est autre que celle de Rayleigh déjà étudiée.

Soient x_1 et x_2 deux valeurs telles que la probabilité que $X < x_1$ et $X > x_2$ soit respectivement égale à 1/100. Comme il a été vu, X ne sort probablement pas de l'intervalle x_1, x_2 tout en l'atteignant peut-être, ceci au cours de cent mesures indépendantes. Ce résultat est souvent présenté en disant que dans une statistique X reste compris entre x_1 et x_2 pour 98 % des cas. Le rapport $\frac{x_1}{x_2}$ étant égal à 27 décibels pour la loi de Rayleigh, il est possible de dire simplement que la fluctuation ne dépasse pas ce chiffre pour 98 % des cas.

Il est important de savoir quelle est la variation en fonction de la fréquence ou de la position. *La fonction de corrélation des puissances* pour l'un de ces deux paramètres donne une indication sur la réponse cherchée.

Soit une répartition uniforme en surface ou en volume, et ρ_S, ρ_V les fonctions de corrélation de la puissance pour le cas à deux et trois dimensions :

$$\sqrt{\rho_S} = C_1 \left| \iint \frac{1}{\rho} e^{i\frac{2\pi}{c}\Delta f\rho(1+\cos\theta)} \rho^2 \, d\rho \, d\theta \right|,$$

$$\sqrt{\rho_V} = C_2 \left| \iint \frac{1}{\rho^2} e^{i\frac{2\pi}{c}\Delta f\rho(1+\cos\theta)} \rho^2 \sin\theta \, d\rho \, d\theta, \right|.$$

C_1 et C_2 étant des constantes.

En posant $\beta = \frac{\pi D}{c}\Delta f$, D est la distance maximum des échos. Il vient

$$\sqrt{\rho_S} = \frac{1}{\beta}\int_0^{\beta} J_0(2u)\, du, \tag{34}$$

$$\sqrt{\rho_V} = \frac{1}{\beta}\int_0^{\beta} \frac{\sin u}{u}\, du. \tag{35}$$

Soit $\frac{D}{c} = \tau$ temps mis par la lumière pour parcourir le chemin D. Il vient, $(\Delta f)_0$ étant le diamètre de corrélation,

$\tau(\Delta f)_0^S \# 0,6$ dans le problème à deux dimensions ;

$\tau(\Delta f)_0^V \# 1,4$ dans le problème à trois dimensions.

Un exemple est intéressant : soit $D = 50$ km, dans le cas du problème à deux dimensions,

$$(\Delta f)_0^S = 18 \text{ kc/s}.$$

Des points espacés dans le spectre de 36 kc/s peuvent être considérés comme indépendants. Réciproquemment, il est possible d'espérer qu'une bande de 8 kc/s ne soit pas trop déformée et du moins, « fluctue en bloc ». C'est le cas de l'amateur de radiodiffusion qui reçoit un poste lointain sur une antenne petite devant la longueur d'onde, donc peu directive.

Le calcul exact ne correspond bien entendu à aucun des cas à deux ou trois dimensions. Mais les valeurs données permettent de se faire une idée du point de vue physique. La valeur adoptée pour D devrait être celle à partir de laquelle les échos contribuent peu au signal, c'est en pratique l'« horizon optique pour la longueur d'onde en question » — 50 km semble être une valeur raisonnable pour les ondes longues. Pour les ondes métriques, cette valeur peut être beaucoup plus courte.

Prenons le cas de la télévision en bande III ($\lambda = 1,75$ m); il est possible de prendre

$$D = 500 \text{ m}, \qquad \text{d'où} \qquad (\Delta f)_0 \# 6 \text{ Mc/s}.$$

Une antenne peu directive ne permet pas d'avoir un signal de bande passante correcte.

La télévision à haute définition exige donc une antenne directive, pour pouvoir profiter de la bande totale des signaux transmis.

Soit maintenant à calculer la fonction de corrélation des puissances dans le cas où le point O se déplace d'une quantité ΔD. En faisant encore l'hypothèse de répartition uniforme des échos, les fonctions ρ_S et ρ_V sont données par

$$\left.\begin{aligned} &(36) \qquad \sqrt{\rho_S} = J_0(\beta') \\ &(37) \qquad \sqrt{\rho_V} = \frac{\sin\beta'}{\beta'} \end{aligned}\right\} \quad \text{avec} \quad \beta' = \frac{2\pi\Delta D}{\lambda}.$$

Le diamètre de corrélation dans l'un et l'autre cas s'obtient pour

$$\beta' \# 1 \qquad \text{d'où} \qquad (\Delta D)_0 \# \frac{\lambda}{\pi}.$$

Il est à remarquer d'une part que ce diamètre de corrélation est indépendant de D, d'autre part qu'il est assez inférieur à la longueur d'onde. Un champ d'échos multiples varie assez rapidement. Pour s'en faire une idée, il est nécessaire d'effectuer les mesures aux différents sommets d'un réseau de dimension de maille égale à $\frac{\lambda}{\pi}$.

2.2.2. Cas de l'antenne directive. — Il est possible de capter directement au point O une puissance comparable à celle reçue des échos, soit que l'influence des échos se fasse peu sentir, il est dit alors que *le point de réception est « dégagé »*, soit que l'antenne de réception est elle-même directive. Soit m le rapport de la puissance reçue directement à la puissance reçue par l'intermédiaire des échos.

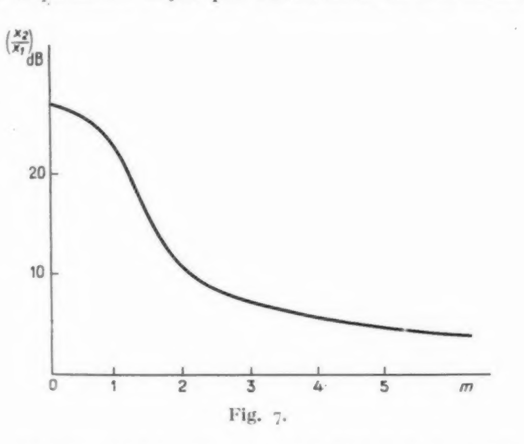


Fig. 7.

En reprenant le raisonnement déjà fait, la courbe de $\frac{x_2}{x_1}$ représentant la fluctuation totale pour 98 % des cas peut être établie. Sur la figure 7, m a été portée en abscisse et $\frac{x_2}{x_1}$ en ordonnée, en décibels.

Pour m grand il est possible de donner une approximation par excès pour le rapport $\frac{x_2}{x_1}$:

$$(38) \qquad \left(\frac{x_2}{x_1}\right)_{\text{dB}} \# \frac{28}{\sqrt{m}}.$$

Cette formule est très intéressante du point de vue physique. *Elle montre que la fluctuation peut atteindre des valeurs appréciables même pour m grand.*

Ainsi si $m = 100$ (m, rapport des énergies reçues directement à l'énergie reçue par l'intermédiaire des échos); la fluctuation totale pendant 98 % des cas peut atteindre environ 3 dB.

Si le chiffre de 98 % est modifié, seul le numérateur de l'expression (38) est modifié. La loi est toujours en $\frac{1}{\sqrt{m}}$ pour m grand.

Une autre remarque s'impose également, *lorsque m passe d'une petite valeur à 3 par exemple, le rapport $\frac{x_2}{x_1}$ diminue très rapidement* (27 et 23 dB pour $m = 0$ ou 1, et 11 dB pour $m = 3$).

C'est une constatation à laquelle l'expérimentateur est souvent amené au cours de mesures de propagation (*cf.* [8]).

Les expressions (27) et (28) permettent de calculer l'expression de la fonction de corrélation ρ_m. Il est à remarquer que si R_0 est le rayon de corrélation pour $m = 0$, R_m est le rayon de corrélation dans le cas général et R_1 un nombre supérieur à R_0, il est possible d'écrire

$$(39) \qquad R_m = R_0 \frac{1 + 2m\dfrac{R_1}{R_0}}{1 + 2m}.$$

Donc, si m augmente, R_m augmente également. Le nombre des mesures à effectuer diminue.

Lorsque m est très grand, la variable aléatoire X varie dans un intervalle très petit. Il arrive alors que le bruit de fond de l'appareil de mesure devienne comparable à cette quantité. La notion de rayon de corrélation du phénomène perd de son intérêt. C'est la précision de l'appareillage de mesure, imposée par le bruit de fond, qui conditionne alors la méthode de mesure à adopter.

Ces résultats peuvent être appliqués au cas du téléspectateur. Pour que le cahier des charges de la télévision soit respecté (par exemple moins de 1 dB de variation d'amplitude dans la bande video), il serait nécessaire d'avoir dans la plupart des cas des aériens à gain beaucoup plus élevé que ceux habituellement utilisés.

Les résultats viennent d'être exposés sans parler du gain ou de la directivité de l'aérien. L'énergie reçue à l'entrée du récepteur a été séparée en deux parties, l'une fixe proportionnelle à a^2 attribuée à une « onde directe », l'autre fluctuante, proportionnelle à Σa_k^2 provenant d'échos, de réflexions multiples, d'inhomogénéités atmosphériques, etc. A partir de là ont été déduites les propriétés générales que l'observation mettra en évidence, si aucun autre phénomène physique ne vient se superposer (propagations anormales, réfractions sur des couches d'inversions, etc.).

Il est intéressant d'examiner l'influence du gain de l'aérien lui-même sur le rapport $m = \frac{a^2}{\Sigma a_k^2}$.

Soit m_0 le rapport obtenu à l'aide d'une antenne omnidirectionnelle. m_0 peut être inférieur à l'unité et c'est ce qui a été implicitement supposé dans la première partie de l'exposé (*cf.* 2.2.1).

Soit, de plus, *une répartition des échos telle que l'énergie reçue en* O *ne dépende pas de la direction* OM. Soit $f(\theta, \varphi)$, l'expression du diagramme en énergie de l'antenne. Le rapport $\frac{m}{m_0}$ s'écrit

$$\frac{m}{m_0} = \frac{f(0)}{\int f(M)\, d\Omega} \qquad (\Omega \text{ angle solide});$$

mais le second membre n'est autre que l'expression du gain G de l'antenne dans la direction Oz, direction de la source principale. Donc

$$m = m_0 G. \tag{40}$$

Dans le cas considéré, m croît donc directement comme le gain G de l'aérien. L'énergie reçue des échos reste constante; c'est l'énergie reçue directement qui augmente comme le gain G de l'aérien.

En fait, dans bien des cas, m croît moins vite que G, car l'influence des sources fluctuantes dans des directions voisines de Oz est souvent prépondérante. C'est le cas bien connu de la diffusion troposphérique.

2.3. Rayonnement de sources indépendantes.

2.3.1. Quelques propriétés des projecteurs d'ondes. — Des sources indépendantes à rayonnement isotrope créent à l'infini un champ fonction de la direction OM. Le problème peut se traiter à deux ou trois dimensions.

Soit donc dans un volume, n sources *indépendantes* à rayonnement isotrope, réparties dans un domaine dont la plus grande dimension est l (*fig.* 8).

Soit une sphère de rayon R très grand devant l. Il est connu que le champ reçu en M se met sous la forme

$$\mathbf{A} = \sum_1^n \frac{\mathbf{b}_k}{MA_k} e^{i\frac{2\pi}{\lambda} MA_k}.$$

D'après l'hypothèse $R \gg l$:

$$\mathbf{A} \# \frac{1}{R} \sum_1^n \mathbf{b}_k e^{i\frac{2\pi}{\lambda} MA_k}.$$

L'amplitude reçue à l'infini se représente comme l'amplitude d'une somme de vecteurs, eux-mêmes d'amplitudes fixes et de phases variables en fonction de la direction OM.

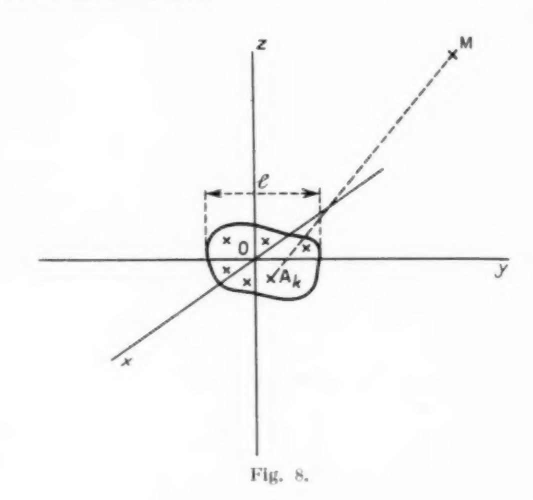


Fig. 8.

Chaque vecteur $\mathbf{b}_k$ caractérise la source de rang k. Les sources sont dites « indépendantes » ou encore « découplées » si les vecteurs $\mathbf{b}_k$ sont indépendants entre eux.

Or, si Σb_k^2 est donné, et cette quantité est proportionnelle à la somme des énergies rayonnées par chacune des sources, le maximum d'amplitude s'obtient dans le cas où tous les vecteurs sont en phase. Elle est égale à Σb_k.

D'autre part, il est facile de voir que Σb_k^2 étant fixé *le maximum maximorum de* A *s'obtient pour tous les* b_k *égaux.* Dans ces conditions

$$\frac{(\Sigma b_k)^2}{\Sigma b_k^2} = n.$$

L'énergie maximum reçue à l'infini au point ou tous les rayonnements arrivent en phase croît donc comme le nombre total n des sources.

Ce résultat est important car il ne fait pas intervenir la position relative des sources, mais seulement le fait que l'énergie rayonnée a été divisée entre un certain nombre de sources indépendantes.

Le gain maximum d'un projecteur d'onde ne dépend que du nombre de sources indépendantes.

Or des sources à rayonnement isotropes ne peuvent en pratique être indépendantes que si leurs distances relatives sont comparables à la demi-longueur d'onde. Dans le cas contraire, « l'impédance d'alimentation » de chaque source devrait être considérablement diminuée. L'énergie réactive de l'ensemble augmenterait, donc également la surtension.

Quelques années auparavant, différents auteurs avaient été amenés à proposer des antennes à « supergain » sur des principes qui, en définitive, se ramènent à concentrer des sources de rayonnement indépendantes dans un espace très petit.

Un calcul connu amène en effet à donner pour valeur du gain maximum la formule

$$G = \frac{4\pi S}{\lambda^2}.$$

Ce calcul est effectué à partir des formules d'Huyghens-Kottler, où la source rayonnante est supposée ne pas rayonner dans la direction opposée à la propagation.

Il est nécessaire, dans le cas de sources isotropes, de diviser par le facteur 2. Donc si n est le nombre de sources indépendantes, il est possible d'écrire

$$\frac{2\pi S}{\lambda^2} = n.$$

En supposant les sources équidistantes, cette formule donne pour leur espacement

$$d = \frac{\lambda}{\sqrt{2\pi}} \# \frac{\lambda}{2}.$$

Donc, les deux définitions du gain sont équivalentes à condition de supposer les sources indépendantes au moins écartées de $\frac{\lambda}{2}$.

Les *qualités de pouvoir séparateur* sont, dans l'hypothèse des sources indépendantes, liées au contraire de manière essentielle aux dimensions du domaine dans lequel se trouvent les sources et à leur répartition.

Il est possible d'ailleurs de s'inspirer de raisonnements déjà effectués précédemment. La fonction de corrélation $\rho(M)$ donne une idée du nombre de « points indépendants » possibles sur la sphère de l'infini. Ce nombre est, par exemple dans le cas où les sources sont sur une surface plane S, proportionnel à $\frac{S}{\lambda^2}$. Dans l'hypothèse d'égalité des sources (gain maximum) ce nombre est maximum pour des sources équidistantes.

Les propriétés *des feuilles latérales* peuvent également se déduire de notions déjà développées.

Lorsque le point M est éloigné du point de l'axe des z pour lequel toutes les sources ont été « mises en phase », il est raisonnable de penser *a priori* que le champ reçu se comporte comme une somme de vecteurs d'amplitudes fixes et de phases aléatoires.

Ainsi, la valeur la plus probable est voisine de Σb_k^2. Mais le gain G est donné par

$$G = \frac{(\Sigma b_k)^2}{\Sigma b_k^2}.$$

Donc le rapport de l'énergie reçue au point d'amplitude maximum et de l'énergie moyenne des « feuilles latérales éloignées » est, si aucune précaution spéciale n'est prise, de l'ordre de G.

2.3.2. Fluctuation d'un écho de radar. — Étant donné la structure compliquée d'un avion ou d'un navire rapportée à une longueur d'onde courte (10 cm par exemple), il est possible de considérer le champ reçu en écho d'un tel obstacle comme une somme d'un grand nombre de vecteurs d'amplitudes fixes et de phases aléatoires lorsque varie la position de l'obstacle dans l'espace.

Les résultats de la théorie générale indiquent donc qu'il faut s'attendre à des fluctuations de l'ordre de 25 dB (fluctuation totale probable dans 98 % des cas). C'est bien ce que donnent les résultats expérimentaux directs de relevés d'échos sur maquette d'avion par exemple (*cf.* [4], p. 542).

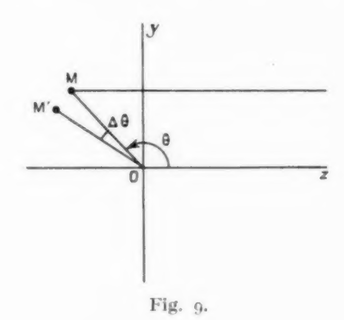


Fig. 9.

Il est intéressant de calculer la fonction de corrélation correspondante dans un cas voisin de la réalité.

Soit une répartition uniforme d'obstacles sur un disque de rayon D (*fig.* 9), $\Delta\theta$ l'angle dont tourne cet ensemble. Les phases des différents vecteurs se modifient pour le point de l'infini dans la direction Oz, mais non leurs amplitudes.

La fonction de corrélation est donnée par la formule

$$\sqrt{\rho(\Delta\theta)} = C \left| \int_0^{2\pi} \int_0^{D} e^{\,i\frac{4\pi}{\lambda}\Delta\theta\rho\sin\theta} \rho \, d\rho \, d\theta \right|,$$

dans laquelle C est une constante.

En intégrant en θ, on a :

$$\sqrt{\rho(\Delta\theta)} = 2\pi C \int_0^{D} \rho J_0\!\left(\frac{4\pi}{\lambda}\rho\right) d\rho.$$

En posant

$$\beta = \frac{2\pi D}{\lambda}\Delta\theta,$$

il vient

(41) $$\rho(\Delta\theta) = \frac{J_1^2(2\beta)}{\beta^2}.$$

D'où pour la valeur du diamètre de corrélation,

(42) $$(\Delta\theta)_0 \# \frac{2\lambda}{9D},$$

$(\Delta\theta)_0$ mesure l'angle minimum tel que deux mesures d'échos puissent être déclarées indépendantes, c'est-à-dire qu'une valeur trouvée à un certain angle ne puisse faire préjuger de la valeur trouvée à l'angle voisin distant de $(\Delta\theta)_0$.

Pour un avion dans des conditions normales, cet angle est très faible. Soit

$$D = 20 \text{ m}, \qquad \lambda = 10 \text{ cm}, \qquad (\Delta\theta)_0 \# 4 \text{ minutes}.$$

Si la vitesse de rotation $\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$ est connue, il est possible d'en déduire la fonction et le rayon de corrélation en fonction du temps.

Soit, par exemple, un avion volant à 800 km/h sur une trajectoire rectiligne, à 15 km du radar, et vu sous un angle de 45°; $\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{1}{80}$. Il vient $(\Delta t)_0 = 0{,}1$ s.

Il est connu d'autre part que, même lorsqu'un avion suit une trajectoire rectiligne, son axe géométrique varie continuellement par rapport à la trajectoire. Ce phénomène peut engendrer des vitesses de rotation instantanées assez grandes, qui peuvent bien expliquer la fluctuation observée des échos de radar.

Notons que la vitesse de fluctuation est d'autant plus forte que la longueur d'onde est plus petite. Les ondes métriques peuvent ainsi présenter une supériorité sur les ondes centimétriques pour le guidage d'engins rapides.

Il est intéressant également de calculer la fonction de corrélation dans le cas où, la position de l'obstacle restant fixe, c'est la fréquence f qui varie.

α est donné par

$$\alpha = \frac{4\pi\rho\cos\theta}{c}\Delta f.$$

La fonction de corrélation est encore donnée par la formule (41). Mais alors

$$\beta = \frac{2\pi D}{c}\Delta f.$$

Le diamètre de corrélation est donné par

$$(\Delta f)_0 \# \frac{2c}{9D}.$$

Dans l'exemple choisi $(\Delta f)_0 \# 4$ Mc/s. Ceci explique la déformation d'un écho de radar dans le cas d'une impulsion fine.

2.3.3. Étude d'un problème de turbulence. — Soient n sources réparties dans le domaine de la figure 8 et telles que les vitesses instantanées de ces sources soient des vecteurs de directions et d'amplitudes aléatoires. La loi de distribution des directions est uniforme, celle des amplitudes est gaussienne. Quelle est la puissance reçue au cours du temps en un point M fixe, éloigné, par exemple le point à l'infini sur l'axe des z.

Si les sources sont en grand nombre et si de plus les énergies rayonnées sont comparables entre elles, l'énergie reçue en M répond à une loi de Rayleigh.

Il reste pour avoir une idée précise à calculer la fonction de corrélation en fonction du temps. La formule (26''') permet d'exécuter ce calcul. Soit une répartition uniforme d'énergie rayonnée par chaque source. Tous les a_k sont égaux. L'hypothèse faite sur les vitesses permet de connaître la distribution des α_k.

La distribution des vitesses est une loi bien connue en statistique des gaz sous le nom de distribution de Maxwell. En se reportant aux exposés classiques, soit dn le nombre des sources dont le module v de la vitesse est compris entre v et $v + dv$

$$dn = C e^{-\left(\frac{v}{v_0}\right)^2} v^2 \, dv.$$

v_0 est la vitesse la plus probable.

C est une constante.

Dans ces conditions, le nombre dn' de sources dont la composante de la vitesse suivant l'axe des z est comprise entre v et $v + dv$ est donné par :

$$dn' = \frac{n}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{v_0} e^{-\left(\frac{v}{v_0}\right)^2} dv.$$

Or :

$$\alpha_k = \frac{2\pi}{\lambda} v_k \tau.$$

D'où en supposant n très grand :

$$\sqrt{\rho_0(\tau)} = C' \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[i \frac{2\pi}{\lambda} v\tau - \left(\frac{v}{v_0}\right)^2 \right] dv.$$

C' est une constante.

Cette intégrale se calcule par la transformation de Fourier. Il vient :

$$\rho_0(\tau) = e^{-2\left(\frac{\pi v_0}{\lambda}\tau\right)^2}.$$

Le diamètre de corrélation $(\Delta l)_0$ est donné par :

$$(\Delta l)_0 \# 0,4 \frac{\lambda}{v_0}.$$

Ces deux expressions ne dépendent que du rapport $\frac{v_0}{\lambda}$. Si $\lambda = 1{,}5$ m, $v_0 = 3$ m/s, il vient

$$(\Delta l)_0 = \frac{2}{10}\ \mathrm{s}.$$

Ce calcul amène plusieurs remarques.

Une vitesse de translation supplémentaire, égale pour toutes les sources, n'amène aucun changement dans l'expression de la fonction de corrélation. Physiquement c'est bien évident.

Une translation uniforme n'amène pas un changement de l'amplitude du champ reçu en M, mais seulement une modification de la fréquence (effet Döppler-Fizeau).

Le calcul de la fonction de corrélation permet d'apprécier « l'élargissement du spectre de fréquence » dû à la turbulence, puisque fonction de corrélation et spectre de puissance sont transformés de Fourier l'un de l'autre.

Si le nombre des sources diminue, la fonction de corrélation augmente à τ constant, donc également le diamètre de corrélation.

2.4. Effet d'erreurs de phase sur les caractéristiques d'un projecteur d'onde.

Soit un projecteur d'onde caractérisé par n sources indépendantes (*fig.* 8). Le flux d'énergie reçu *en un point* M *à grande distance* est proportionnel à une quantité A^2 telle que

$$A^2 = \mathbf{A}.\mathbf{A}^*$$

et $\mathbf{A}$ donné par la formule

$$\mathbf{A} = \Sigma \mathbf{a}_k,$$

avec

$$\mathbf{a}_k = \mathbf{b}_k \frac{e^{i\frac{2\pi}{\lambda} A_k M}}{A_k M}, \qquad \text{mais} \quad A_k M \# \mathrm{OM},$$

$\mathbf{b}_k$ caractérise complètement la source de rang k. Ce vecteur possède une amplitude b_k et une phase φ_k. L'énergie totale rayonnée est proportionnelle à Σa_k^2 ou Σb_k^2.

Soit maintenant un nouveau régime de rayonnement déduit du précédent par un changement de phase α_k de la source de rang k sans changement d'amplitude. Les vecteurs $\mathbf{A}$ et $\mathbf{a}_k$ se transforment en $\mathbf{A}'$ et $\mathbf{a}'_k$. Et l'énergie reçue au même point M est proportionnelle à

$$A'^2 = \mathbf{A}'.\mathbf{A}'^*.$$

La question qui se pose est de comparer *a priori* A^2 et A'^2. Pour cela, soit $\mu(M, \alpha_k)$ la fonction

$$(44) \qquad \mu(M, \alpha_k) = \frac{A'^2 - A_0^2}{A^2 - A_0^2}, \qquad \text{avec} \quad A_0^2 = \Sigma a_k^2.$$

A_0^2 représente l'énergie reçue au point M dans le cas d'un rayonnement isotrope.

La connaissance de la fonction μ au point M permet évidemment de résoudre le problème. *Or, il est possible de donner une expression simple de la valeur moyenne de cette fonction* μ *pour les différents points* M.

En effet

$$(45) \qquad \mu = \frac{(A^2 - A_0^2)(A'^2 - A_0^2)}{(A^2 - A_0^2)^2}$$

et $\mu = \rho$ telle que le donne la formule (24).

Une expression ne dépendant que des α_k et des a_k a été obtenue pour ρ dans le cas où les différents vecteurs se déduisent les uns des autres par une variation aléatoire de la phase. Il est possible de penser que c'est le cas en général lorsqu'on passe d'un point M à un autre point M absolument quelconque et indépendant. De manière plus précise, il suffit pour que la formule simplifiée soit valable que des expressions telles que $\overline{\mathbf{a}_k.\mathbf{a}_l}$ soient nulles, ce qui est en général vérifié. Dans ces conditions :

$$(46) \qquad \mu = \frac{|\Sigma a_k^2 e^{i\alpha_k}|^2}{(\Sigma a_k^2)^2}.$$

Il a été possible de supprimer le signe valeur moyenne dans la formule (46), car les α_k ne dépendent évidemment pas de la position du point M. Comme il a été vu, μ est une fonction comprise entre 1 et 0 qui se calcule aisément.

Il est possible d'en tirer une règle générale très intéressante.

La valeur la plus probable de l'expression (44) exprimant l'énergie reçue en un point, après que les phases des sources de rayonnement aient été modifiées en fonction de l'énergie reçue précédemment et du niveau du rayonnement isotrope, est donné par l'expression (46), en général facile à calculer.

La conséquence de $0 < \mu < 1$ est en moyenne que :

si $A^2 > A_0^2$, $A'^2 < A^2$ l'énergie reçue diminue ;

si $A^2 < A_0^2$, $A'^2 > A^2$ l'énergie reçue augmente.

Physiquement, cela s'explique en disant que le niveau de rayonnement a tendance à regagner le niveau isotrope et cela d'autant plus qu'il en est plus éloigné.

Lorsque $A^2 \gg A_0^2$, (44) s'écrit

$$\frac{A'^2}{A^2} \simeq \mu, \tag{47}$$

Lorsque $A^2 \ll A_0^2$ (44) s'écrit

$$\frac{A'^2 - A^2}{A_0^2} \simeq 1 - \mu. \tag{48}$$

L'expression (47) est intéressante pour la partie utile du diagramme, par exemple le lobe principal d'une antenne à pinceau fin.

L'expression (48) sert dans le cas où le niveau demandé des feuilles latérales est très bas (pour une antenne à pinceau fin, rapport des niveaux du lobe principal et des feuilles latérales inférieur à la valeur du gain G dans l'axe).

Exemple. — Soit le cas de n sources égales, et une distribution gaussienne des α_k, d'écart type α_0.

C'est-à-dire que la densité de probabilité de la variation de phase α est de la forme

$$p(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha_0^2}} e^{-\frac{\alpha^2}{2\alpha_0^2}}.$$

Dans ces conditions,

$$\overline{\Sigma \sin \alpha_k} = 0,$$

$$\overline{\Sigma \cos \alpha_k} = C \int_{-\pi}^{+\pi} p(\alpha) \cos \alpha \, d\alpha = e^{-\frac{\alpha_0^2}{2}}$$

et

$$\mu = e^{-\alpha_0^2}. \tag{49}$$

Dans le cas du critérium de Lord Rayleigh, $\alpha_0 = \frac{\pi}{8}$, il vient $\mu = 0{,}86$. Les propriétés générales de l'aérien sont peu changées. La perte en gain dans l'axe par exemple est inférieure au décibel. Il n'en est plus de même si α_0 augmente et *ceci très rapidement* puisque la loi donnée par l'expression (48) est une exponentielle.

Cas d'une distribution continue. — Ce cas se ramène au précédent en utilisant le critère mis en évidence au paragraphe précédent. Dans le cas d'un projecteur d'onde présentant une pupille de sortie plane par exemple, cette surface sera divisée en carrés égaux de côté $\frac{\lambda}{2}$. Soit α_k la valeur moyenne de l'écart de phase par rapport à la phase moyenne φ_k pour le $k^{ième}$ carré. Les différents α_k ainsi trouvés seront utilisés pour effectuer le calcul de μ par la formule (46). Il est visible que des variations de phase, telles que leur valeur moyenne soit très petite sur les carrés en question, n'interviennent que très peu dans le produit final. C'est bien ce que l'expérience vérifie. Des perturbations de la phase limitées en dimensions spatiales à des régions inférieures à $\frac{\lambda}{2}$ n'interviennent pas sur les caractéristiques d'un aérien. C'est ainsi qu'il est possible de construire avec de très bonnes performances des lentilles hyperfréquence à plaques percées d'ouvertures, ceci bien que la surface de phase à la sortie des plaques soit probablement assez éloignée d'une phase plane (*cf.* [10]).

CONCLUSION.

Une foule d'autres problèmes concernant la Radioélectricité pourraient être abordés par le même point de vue statistique. Les exemples d'applications décrits dans cet article montrent que la théorie peut être utilisée pour bien d'autres études que celles de bruit de fond.

Il est à remarquer que le point de vue probabiliste est souvent le seul possible dans l'étude de problèmes physiques complexes à grand nombre de paramètres, dont la plupart sont inconnus de l'expérimentateur. C'est souvent le cas en Radioélectricité.

De toute manière ce point de vue est très fructueux pour l'ingénieur radioélectricien, car il lui présente les faits sous un jour nouveau. Mieux que l'exposé de la seule théorie, les exemples d'application doivent lui en montrer toute l'utilité et lui permettre de se familiariser avec son maniement.

M. H. Gutton, les ingénieurs du laboratoire dont M. Weill et particulièrement M. Robieux ont aidé l'auteur au cours d'échanges de vue fructueux. Enfin au cours d'un colloque du L. N. R., MM. Voge, Clavier et Hennequin lui ont fait utilement préciser certains points. Qu'ils trouvent tous ici l'expression de ses remerciements.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Lord Rayleigh, *Theory of Sound*, vol. 1, chap. II, § 42 *a*.

[2] S. Chandrasekhar, *Stochastic Problems in Physics and Astronomy* (*Rev. Mod. Phys.*, vol. 15, n° 1, janvier 1943).

[3] M. Slack, *The Probability Distributions of Sinusoidal Oscillations Combined in Random Phase* (*J. Inst. Elect. Engrs*, Radio Section, vol. 93, Part. III, n° 22, mars 1946).

[4] G. N. Watson, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions* (Cambridge University Press).

[5] A. Blanc-Lapierre et R. Fortet, *Théorie des fonctions aléatoires* (Masson, Paris).

[6] V. L. Lawson et G. E. Uhlenbeck, *Threshold Signals* (Série du M. I. T., n° 24).

[7] D. E. Kerr, *Propagation of Short Radio Waves* (Série du M. I. T., n° 13).

[8] J. C. Simon et V. Biggi, *Un nouveau type d'aérien et son application à la transmission de télévision à grande distance* (*Onde Elect.*, novembre 1954).

[9] S. Silver, *Microwave Antennas* (Série du M.I.T., n° 12).

[10] G. Broussaud, *Étude de la diffraction des ondes électromagnétiques par un réseau de plaques percées de trous* (*Ann. Radioélect.*, t. 10, janvier 1955).

ÉTUDE D'UNE LIGNE INTERDIGITALE UTILISÉE COMME CIRCUIT ANODIQUE DE MAGNÉTRON OSCILLATEUR POUR U.H.F. ÉTUDE DES DISTORSIONS DU CHAMP ÉLECTROMAGNÉTIQUE

PAR A. LEBLOND,

Département Électronique du Centre de Recherches Techniques de la Compagnie Générale de T.S.F.

SOMMAIRE. — *L'étude présentée par l'auteur dans cet article constitue la seconde partie d'un travail consacré aux lignes interdigitales à plafond utilisées comme circuit anodique de magnétron oscillateur pour U.H.F., dont la première partie a été publiée dans les* Annales de Radioélectricité *en juillet* 1953.

L'objet de cette étude est la détermination des distorsions du champ électromagnétique résultant d'une désadaptation du circuit de sortie du magnétron et le calcul de la variation de fréquence qui en résulte, connue sous le terme « pulling de fréquence ».

Par distorsion du champ électromagnétique on entend les amplitudes relatives des composantes du champ électromagnétique qui ont une répartition spatiale différente de celle qui correspond au mode considéré quand l'anode du magnétron n'est pas chargée et dont la présence est liée au fait que le tube chargé ne présente plus qu'un plan de symétrie au lieu de N quand on ne tient pas compte de la charge.

Le calcul est basé sur l'hypothèse de la transversalité du champ électromagnétique qui est bien en accord avec les résultats expérimentaux.

Dans ces conditions, on aboutit à des résultats directement utilisables et qui sont obtenus à partir des équations de Maxwell, sans aucune hypothèse simplificatrice contrairement à ce qui est le cas quand on traite ce problème pour les anodes à cavités où les difficultés analytiques sont telles qu'il faut toujours faire appel à la méthode des schémas équivalents si l'on veut aboutir à des résultats facilement exploitables. (C.D.U. : 621.373.423 : 621.385.16.029.6.)

SUMMARY. — *In this paper the author presents the second part of a study devoted to the improvement of " interdigital lines with a ground plate" as anode circuit of a magnetron oscillator for U.H.F.*

The first part was published in July 1953 *in the same publication. Now our purpose is the determination of the distorsions of the electromagnetic field arising from the mismatch of the output circuit and the resultant frequency shift more generally known as " frequency pulling ".*

What we mean by distortion of the electromagnetic field are the components of the field whose spatial distribution are different from those of an unloaded circuit for the same mode of oscillation.

The electromagnetic field is supposed to be located in planes perpendicular to the axis of the tube and therefore to the bars of the line.

Such an assumption is in agreement with experimental observation.

We then obtain useful results, proceeding directly from the Maxwelliam equations and without any simplifying assumption as is often the case in dealing with multicavity circuits where the analytical difficulties are too great to go through the question without utilizing the methods of equivalent schemes if one wants to obtain practical results.

(U.D.C. : 621.373.423 : 621.385.16.029.6).

INTRODUCTION.

Dans un article antérieur [1], on a étudié en détail pour la fréquence de résonance du mode π la répartition du champ électromagnétique d'un magnétron utilisant pour anode une ligne dite « ligne interdigitale à plafond ». L'anode qui a été étudiée est représentée schématiquement sur la figure 1. La structure présente N plans de symétrie, N étant égal au nombre de doigts total.

L'étude du mécanisme physique d'échange d'énergie entre les électrons et les champs H.F. [2] conduit à associer à chaque mode de vibration un point représentatif dans le quadrant défini par deux demi-droites rectangulaires où l'on a porté en abscisse les longueurs d'onde et en ordonnée le module du taux de retard des composantes du champ électrique transversal pris dans le plan médian de la ligne, champ avec lequel les électrons interagissent. Parmi ces différents modes possibles d'oscillation on s'est arrêté à l'étude du mode π qui est le mode sur lequel oscillent en général les magnétrons présentant des rendements élevés. Pour ce mode nous avons déterminé la fréquence de résonance et la répartition du champ électromagnétique dans les différents espaces du tube. La répartition ainsi obtenue est celle d'une structure présentant N plans de symétrie qui est différente en fait de la structure réelle d'un tube oscillateur, toujours chargé par une admittance de la forme $y = G + jA$ et ne possédant de ce fait qu'un seul axe de symétrie. La quantité A peut être nulle quand il n'y a pas de réflexion sur le coaxial ou le guide évacuateur d'énergie; mais pratiquement il n'en est jamais ainsi et l'on admet toujours un certain taux d'ondes stationnaires qui doit rester inférieur à 1,3, comme il est en général spécifié dans tous les cahiers des charges de magnétrons oscillateurs.

L'existence d'un tel taux d'ondes stationnaires avec une phase quelconque engendre des variations de fréquence constituant le « pulling de fréquence », variations qui doivent rester inférieures à certaines limites, tandis que la phase du taux d'ondes stationnaires prend toutes les valeurs comprises entre 0 et 2π. La quantité A correspondant à une valeur donnée du taux d'ondes stationnaires pour une phase donnée dans le coaxial de sortie peut être facilement déterminée au moyen de la théorie des lignes coaxiales, connaissant la valeur de l'impédance caractéristique de la ligne de sortie. On voit donc que l'étude des fréquences de résonance de la ligne interdigitale chargée est liée à l'étude de la dérive de fréquence ou « pulling de fréquence ».

Dans le cas d'une anode de magnétron du type à cavités, le calcul de la dérive de fréquence est difficile à conduire de façon rigoureuse, c'est-à-dire au moyen de la théorie électromagnétique de Maxwell. On est obligé de faire certaines hypothèses simplificatrices, en particulier, recourir à la méthode des schémas équivalents assez contestable quand elle est employée à l'étude de propriétés qui ne sont pas liées directement à son introduction.

Dans le cas d'une anode constituée par une ligne à barreaux et, en particulier, dans le cas où cette anode est une ligne interdigitale à plafond, le calcul peut être fait de façon rigoureuse et complète en utilisant systématiquement la notion d'impédance caractéristique telle qu'elle a été développée dans une récente publication [3], [4].

L'exposé qui va suivre comprendra plusieurs parties :

Dans une première partie nous rappellerons les équations valables pour un mode d'oscillation quelconque permettant donc de calculer les fréquences de résonance du bloc anodique à N plans de symétrie et pour chacune de ces fréquences les expressions des potentiels et des intensités d'une section droite de doigt.

Dans une seconde partie nous chercherons la condition de résonance de l'anode chargée et les amplitudes relatives des différentes répartitions spatiales dont la superposition permet de satisfaire aux conditions aux limites.

Nous distinguerons quatre cas qui se subdivisent ainsi :

$$\frac{N}{2}\ \text{impair}\ \begin{cases} \dfrac{N-2}{4} & \text{pair,} \\ \dfrac{N-2}{4} & \text{impair;} \end{cases} \qquad \frac{N}{2}\ \text{pair}\ \begin{cases} \dfrac{N}{4} & \text{impair;} \\ \dfrac{N}{4} & \text{pair.} \end{cases}$$

Pour chacun de ces cas, les équations de résonance et ce que nous appellerons les équations des amplitudes auront la même forme mais les expressions des termes composants seront différentes, d'où la subdivision précédente. Nous donnerons la démonstration complète dans les deux cas, $\frac{N}{2}$ impair, $\frac{N-2}{4}$ pair et $\frac{N}{2}$ pair, $\frac{N}{4}$ impair et donnerons seulement les résultats dans les cas restants, c'est-à-dire $\frac{N}{2}$ impair, $\frac{N-2}{4}$ impair et $\frac{N}{2}$ pair, $\frac{N}{4}$ pair, la méthode suivie étant la même.

1. PREMIÈRE PARTIE.

DÉTERMINATION DES FRÉQUENCES DE RÉSONANCE ET DES CHAMPS DANS LE CAS D'UNE STRUCTURE ANODIQUE A N PLANS DE SYMÉTRIE.

Cette étude a été faite dans la publication [3].

Le système étudié est représenté (*fig.* 1).

La distance w est telle que $w < h + \varepsilon$ ($h + \varepsilon$ hauteur des doigts), avec $\varepsilon < h$ (enchevêtrement des doigts presque total). On considère donc la

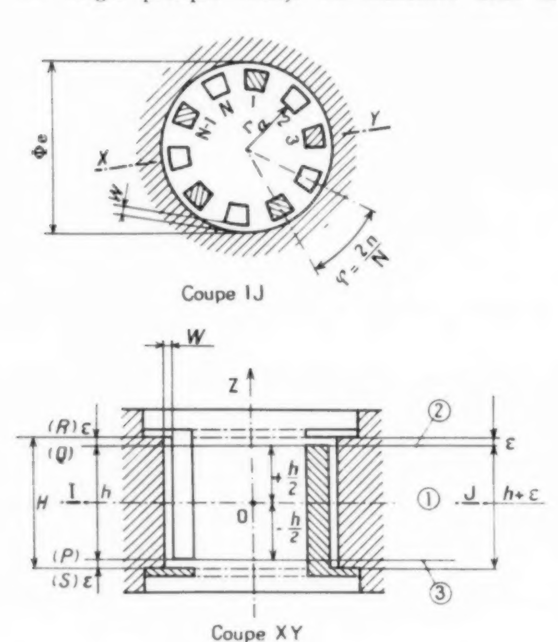


Fig. 1.

cavité comme formée par trois parties numérotées 1, 2 et 3 et comprises respectivement entre les plans P et Q, Q et R, S et P.

Le système de coordonnées employé est le système cylindrique, le plan origine des cotes $z = 0$ étant le plan médian de la structure.

Espace 1. — Les sections droites des doigts sont supposées identiques et indépendantes du plan de section droite considéré. Étant donnée l'hypothèse faite pour w, nous considérerons que dans l'espace 1, compris entre les plans P et Q la distribution du champ électromagnétique est, pour chaque fréquence de résonance, purement transversale.

Espace 2. — Hauteur ε. La section droite de cet espace ne fait apparaître que des sections de doigts pairs, contour Γ_{2p}.

Nous avons par hypothèse :

$$(1)\qquad \begin{cases} I_{2p}\left(+\dfrac{h}{2}\right) \neq 0, & V_{2p+1}\left(+\dfrac{h}{2}\right) \neq 0; \\ I_{2p+1}\left(+\dfrac{h}{2}\right) = 0, & V_{2p}\left(+\dfrac{h}{2}\right) = 0. \end{cases}$$

Nous supposerons en écrivant ces équations que la capacité de l'extrémité des doigts d'ordre pair par rapport à la base du plateau de fixation des doigts d'ordre impair est nulle. Nous reviendrons plus loin sur ce point.

Espace 3. — Hauteur ε. La section droite de cet espace ne fait apparaître que des sections de doigts impairs, contours Γ_{2p+1}. Nous avons, par hypothèse avec la même restriction que pour l'espace 2 :

$$(2)\qquad \begin{cases} I_{2p+1}\left(-\dfrac{h}{2}\right) \neq 0, & V_{2p}\left(-\dfrac{h}{2}\right) \neq 0; \\ I_{2p}\left(-\dfrac{h}{2}\right) = 0, & V_{2p+1}\left(-\dfrac{h}{2}\right) = 0. \end{cases}$$

La transversalité du champ électromagnétique permet de définir pour chaque section droite de doigt comme il est montré en (3), un potentiel et une intensité longitudinale $V_p(z)$ et $I_p(z)$ tels que l'on ait, compte tenu des conditions aux limites (1) et (2)

$$(3)\qquad V_p(\Phi) = D\,e^{-jp\psi_k}\,\mathrm{tg}\frac{\Phi_0}{2}\cos\Phi + D\sin\Phi\,e^{+jp(\pi-\psi_k)}$$

$$(4)\qquad I_p(\Phi) = -j\,\frac{D\,e^{-jp\psi_k}}{K_c(\psi_k)}\,\mathrm{tg}\frac{\Phi_0}{2}\sin\Phi + j\,\frac{D\,e^{jp(\pi-\psi_k)}}{K_c(\pi-\psi_k)}\cos\Phi.$$

Dans ces formules

$$\Phi = \frac{2\pi z}{\lambda},\qquad \Phi_0 = \frac{2\pi h}{\lambda};\qquad D,\ \text{constante arbitraire};$$

$K_c(\psi_k)$ est l'impédance caractéristique pour le déphasage ψ_k de la ligne multifilaire formée par les N barreaux supposés prolongés indéfiniment vers $z > 0$ et $z < 0$.

ψ_k est le déphasage unitaire fondamental du mode $\psi_k = k\dfrac{2\pi}{N}$ qui est lié à la longueur d'onde de résonance de ce mode par la relation

$$(5)\qquad \mathrm{tg}^2\frac{\Phi_0}{2} = \frac{Y_c(\pi-\psi_k)}{Y_c(\psi_k)},$$

avec

$$(6)\qquad Y_c(\psi) = \frac{1}{K_c(\psi)}.$$

On voit que pour la structure à N plans de symétrie, on a $\frac{N}{2} - 1$ modes d'oscillation dégénérés et deux modes non dégénérés, les modes dits de coupure.

Les équations (3), (4) et (5) constituent les équations fondamentales de la structure à N plans de symétrie. Elles permettent le calcul de la répartition du champ électromagnétique dans l'espace d'interaction pour une fréquence de résonance quelconque. En effet, si nous considérons une ligne bifilaire prolongée indéfiniment dans la direction z, toute propagation d'énergie le long d'une telle ligne peut être considérée comme la somme d'un certain nombre de propagations propres. Pour chacune de ces propagations le potentiel de deux doigts voisins est tel que

$$V_{p+1} = V_p \, e^{-j\psi_k},$$

k pouvant prendre toutes les valeurs entières de $-\frac{N}{2}$ à $+\frac{N}{2}$.

Il existe donc $(N + 1)$ modes de propagation propres, deux de ces modes conduisant à une vitesse de groupe nulle, avec seulement $\frac{N}{2} + 1$ structures de champ différentes.

Dans le cas présent, les équations (3) et (4) montrent qu'il est seulement nécessaire de considérer deux propagations propres d'angle unitaire ψ_k vers les $z > 0$ et les $z < 0$ et deux autres correspondant à l'angle $-(\pi - \psi_k)$. Les deux propagations propres d'angle unitaire ψ_k ont chacune la même amplitude de tension, de module $\frac{1}{2} D \,\mathrm{tg}\, \frac{\Phi_0}{2}$, le module des intensités associées étant $\frac{1}{2} D \,\mathrm{tg}\, \frac{\Phi_0}{2} Y_c(\psi_k)$.

De même pour les propagations d'angle unitaire $-(\pi - \psi_k)$, le module des tensions est égal à $\frac{1}{2} D$ et celui des intensités à $\frac{1}{2} D Y_c(\pi - \psi_k)$.

A chaque propagation propre correspond une répartition de champ électromagnétique propre qui peut être calculée en utilisant une méthode tout à fait analogue à celle utilisée dans la publication [1] pour les champs du mode zéro et du mode π. Les différents composants du champ total sont alors exclusivement déterminés par la section droite de la ligne multifilaire sans que les conditions aux limites interviennent en aucune façon. Elles n'interviennent que pour régler les amplitudes relatives des différents champs composants. On voit donc que la connaissance des potentiels et des intensités le long d'un doigt est l'intermédiaire de calcul indispensable pour la connaissance du champ électromagnétique total.

2. DEUXIÈME PARTIE.

Le système est représenté sur la figure 2. Le tube est identique au précédent mais on introduit dans le plan médian π de celui-ci une charge

$$Y = G + jA.$$

Y est une admittance complexe. On fera ici une hypothèse simplificatrice en supposant que les distor-

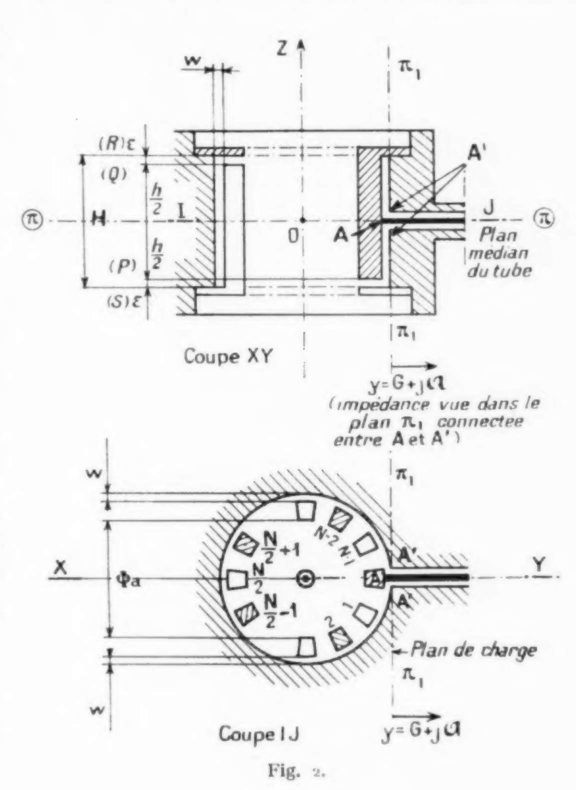


Fig. 2.

sions du champ ou les glissements de fréquence sont principalement dus à la composante jA et de ce fait on suppose la charge égale à jA.

Le tube sera séparé en deux demi-espaces, le demi-espace supérieur et le demi-espace inférieur (*fig.* 3 et 4); on considérera successivement dans chacun de ces demi-espaces une superposition de toutes les propagations propres possibles avec des amplitudes à première vue arbitraires. Celles-ci seront déterminées par l'écriture des conditions aux limites, aux extrémités et bases des doigts d'une part pour chaque demi-espace considéré séparément et à la jonction des deux demi-espaces, d'autre part. Telle est la méthode générale de calcul

que nous allons développer maintenant. Elle tire sa valeur du fait que le mode de fixation de la charge ne perturbe pas la transversalité du champ électro-

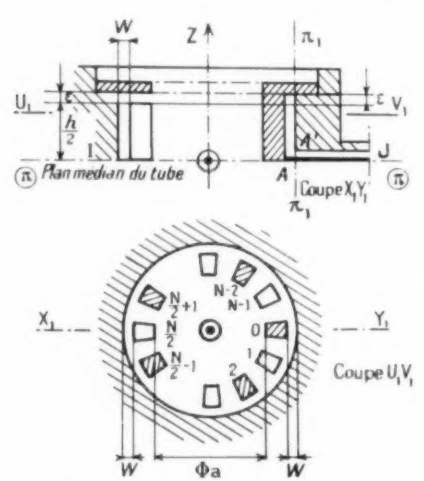


Fig. 3. — Demi-espace supérieur.

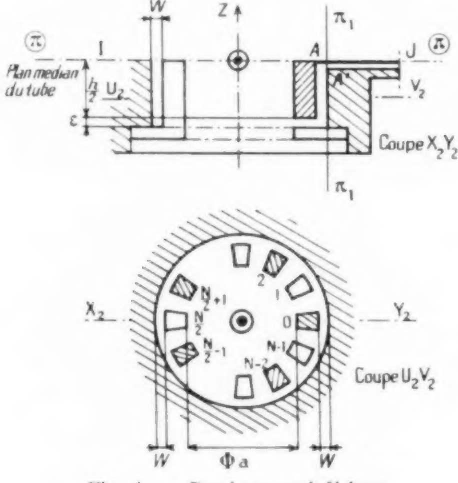


Fig. 4. — Demi-espace inférieur.

magnétique et que l'on peut donc utiliser les notions de potentiel et d'intensité liées à une section droite de doigt connues dans la première partie.

2.1. ÉTUDE DU DEMI-ESPACE SUPÉRIEUR (*fig.* 3).

2.1.1. Expression des composantes de tension et d'intensité.

A un nombre entier k tel que $0 \leq k \leq \frac{N}{2}$, et à un doigt numéroté p, nous associerons deux composantes de tension v_k^p et $v_{\frac{N}{2}-k}^p$ que nous écrirons en omettant le facteur $e^{j\omega t}$:

$$(7)\quad v_k^{(p)} = (C_k \cos\Phi + D_k \sin\Phi)\, e^{-jp\frac{2k\pi}{N}} + (C'_k \cos\Phi + D'_k \sin\Phi)\, e^{jp\left(\pi - 2k\frac{\pi}{N}\right)},$$

$$(8)\quad v_{\frac{N}{2}-k}^{(p)} = \left(C_{\frac{N}{2}-k} \cos\Phi + D_{\frac{N}{2}-k} \sin\Phi\right) e^{-jp\left(\pi - \frac{2k\pi}{N}\right)} + \left(C'_{\frac{N}{2}-k} \cos\Phi + D'_{\frac{N}{2}-k} \sin\Phi\right) e^{jp\frac{2k\pi}{N}},$$

avec

$$\Phi = 2\pi\frac{z}{\lambda},$$

le plan origine des cotes étant toujours le plan médian du tube. Les C, D, C', D' sont des coefficients à première vue arbitraires. Ces coefficients sont liés linéairement, pour chaque propagation propre, aux amplitudes des ondes correspondantes se propageant vers $z > 0$ et vers $z < 0$ comme on le voit en utilisant les relations bien connues :

$$(9)\quad \cos\Phi = \frac{1}{2}(e^{j\Phi} + e^{-j\Phi}), \qquad \sin\Phi = \frac{1}{2j}(e^{j\Phi} - e^{-j\Phi}).$$

Les relations font intervenir quatre modes de propagation propre, d'angle unitaire

$$\psi_k = k\frac{2\pi}{N}, \qquad -\psi_{\frac{N}{2}-k} = -\left(\pi - \frac{2\pi k}{N}\right),$$

$$-\psi_k = -k\frac{2\pi}{N}, \qquad \psi_{\frac{N}{2}-k} = \pi - \frac{2k\pi}{N}.$$

En remplaçant p par $N - p$ nous obtiendrons les valeurs des composantes de tension associées à l'entier k pour le doigt numéroté $N - p$. Il vient

$$(10)\quad v_k^{(N-p)} = (C_k \cos\Phi + D_k \sin\Phi)\, e^{jp\frac{2k\pi}{N}} + (C'_k \cos\Phi + D'_k \sin\Phi)\, e^{-jp\left(\pi - \frac{2k\pi}{N}\right)},$$

$$(11)\quad v_{\frac{N}{2}-k}^{(N-p)} = \left(C_{\frac{N}{2}-k} \cos\Phi + D_{\frac{N}{2}-k} \sin\Phi\right) e^{jp\left(\pi - \frac{2k\pi}{N}\right)} + \left(C'_{\frac{N}{2}-k} \cos\Phi + D'_{\frac{N}{2}-k} \sin\Phi\right) e^{-jp\frac{2k\pi}{N}}.$$

Nous ferons ici la remarque suivante :

Si l'on se reporte à la figure 2 on voit que les oscillations susceptibles de se développer sur le tube chargé, à un axe de symétrie, sont de deux types :

a. PREMIER TYPE. — Les tensions observées en deux sections droites de doigts symétriques par rapport au plan XY sont égales.

b. Deuxième type. — Les tensions observées en deux sections droites de doigts symétriques par rapport au plan XY sont opposées.

Nous admettrons que cette relation, vraie à première vue pour la tension totale, c'est-à-dire indépendamment du mode de décomposition utilisé, est vraie pour chaque composante $\left[v_k^{(p)} + v_{\frac{N}{2}-k}^{(p)}\right]$ de la décomposition précédente. Ceci peut paraître un peu arbitraire mais est parfaitement normal puisque les différentes tensions composantes d'indice k différent, sont irréductibles les unes aux autres (caractère « propre » des propagations). Nous étudierons successivement les tensions et les intensités afférant à ces deux types susdits :

Étude des oscillations du premier type. Expressions des composantes de tension.

On doit donc avoir entre les tensions $\left[v_k^{p} + v_{\frac{N}{2}-k}^{p}\right]$ et $\left[v_k^{N-p} + v_{\frac{N}{2}-k}^{N-p}\right]$, la relation

$$\left[v_k^{(p)} + v_{\frac{N}{2}-k}^{(p)}\right] = \left[v_k^{(N-p)} + v_{\frac{N}{2}-k}^{(N-p)}\right] \tag{12}$$

pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq \frac{N}{2}$ pouvant être égal à ces limites. Ceci nous conduit, par les relations (7), (8), (10), (11), à

$$C_k = C'_{\frac{N}{2}-k}, \tag{13}$$

$$D_k = D'_{\frac{N}{2}-k}. \tag{14}$$

d'où les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} (15)\quad v_k^{(p)} + v_{\frac{N}{2}-k}^{(p)} &= (C_k \cos\Phi + D_k \sin\Phi)\, 2\cos\left(p\frac{2k\pi}{N}\right) \\ &+ \left(C_{\frac{N}{2}-k}\cos\Phi + D_{\frac{N}{2}-k}\sin\Phi\right) 2\cos p\left(\pi - \frac{2k\pi}{N}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (16)\quad v_k^{(N-p)} + v_{\frac{N}{2}-k}^{(N-p)} &= (C_k \cos\Phi + D_k \sin\Phi)\, 2\cos\left(p\frac{2k\pi}{N}\right) \\ &+ \left(C_{\frac{N}{2}-k}\cos\Phi + D_{\frac{N}{2}-k}\sin\Phi\right) 2\cos p\left(\pi - \frac{2k\pi}{N}\right). \end{aligned}$$

Nous appellerons

$$\left[v_k^{(p)} + v_{\frac{N}{2}-k}^{p}\right] = V_k^{(p)}$$

« composante k du potentiel relative au doigt p ».

Dans ces expressions :

k variera par valeurs entières de 0 à $\frac{N}{4}$ ou $\frac{N-2}{4}$ limites comprises;

p variera par valeurs entières de 0 à $\frac{N}{2}$ limites comprises.

Étude des oscillations du second type. Expression des composantes de tension.

Dans ce cas on a la relation

$$\left[v_k^{(p)} + v_{\frac{N}{2}-k}^{(p)}\right] = -\left[v_k^{(N-p)} + v_{\frac{N}{2}-k}^{(N-p)}\right].$$

d'où l'on tire en utilisant les relations (7), (8), (10), (11) :

$$-C_k = C'_{\frac{N}{2}-k}, \tag{17}$$

$$-D_k = D'_{\frac{N}{2}-k}, \tag{18}$$

d'où les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} (19)\quad v_k^{(p)} + v_{\frac{N}{2}-k}^{(p)} &= -2j(C_k \cos\Phi + D_k \sin\Phi)\sin\left(p\frac{2k\pi}{N}\right) \\ &+ 2j(C'_k \cos\Phi + D'_k \sin\Phi)\sin p\pi\left(1 - \frac{2k}{N}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (20)\quad v_k^{(N-p)} + v_{\frac{N}{2}-k}^{(N-p)} &= 2j(C_k \cos\Phi + D_k \sin\Phi)\sin\left(p\frac{2k\pi}{N}\right) \\ &- 2j(C'_k \cos\Phi + D'_k \sin\Phi)\sin p\pi\left(1 - \frac{2k}{N}\right). \end{aligned}$$

Étude des oscillations du premier type. Expression des composantes des intensités.

Nous utilisons pour cela la notion d'impeuance caractéristique. Il vient :

$$\begin{aligned} (21)\quad i_k^{(p)} &= jY_k(D_k \cos\Phi - C_k \sin\Phi)\, e^{-jp\psi_k} \\ &+ jY_{\frac{N}{2}-k}(D'_k \cos\Phi - C'_k \sin\Phi)\, e^{-jp(\pi-\psi_k)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (22)\quad i_{\frac{N}{2}-k}^{(p)} &= jY_{\frac{N}{2}-k}\left(D_{\frac{N}{2}-k}\cos\Phi - C_{\frac{N}{2}-k}\sin\Phi\right) e^{-jp(\pi-\psi_k)} \\ &+ jY_k\left(D'_{\frac{N}{2}-k}\cos\Phi - C'_{\frac{N}{2}-k}\sin\Phi\right) e^{jp\psi_k}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (23)\quad i_k^{(N-p)} &= jY_k(D_k \cos\Phi - C_k \cos\Phi)\, e^{jp\psi_k} \\ &+ jY_{\frac{N}{2}-k}(D'_k \cos\Phi - C'_k \sin\Phi)\, e^{-jp(\pi-\psi_k)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (24)\quad i_{\frac{N}{2}-k}^{N-p} &= jY_{\frac{N}{2}-k}\left(D_{\frac{N}{2}-k}\cos\Phi - C_{\frac{N}{2}-k}\sin\Phi\right) e^{jp(\pi-\psi_k)} \\ &+ jY_k\left(D'_{\frac{N}{2}-k}\cos\Phi - C'_{\frac{N}{2}-k}\sin\Phi\right) e^{-jp\psi_k}. \end{aligned}$$

Avec la condition (13) et (14) qui peut s'écrire

$$D'_k = D_{\frac{N}{2}-k},$$

$$C'_k = C_{\frac{N}{2}-k},$$

il vient pour expressions finales

$$(25)\quad i_k^{(p)} + i_{\frac{N}{2}-k}^{(p)} = j\,Y_k(D_k\cos\Phi - C_k\sin\Phi)\,2\cos\left(p\frac{2k\pi}{N}\right) + j\,Y_{\frac{N}{2}-k}\left(D_{\frac{N}{2}-k}\cos\Phi - C_{\frac{N}{2}-k}\sin\Phi\right) \times 2\cos p\pi\left(1-\frac{2k}{N}\right),$$

$$(26)\quad i_k^{(N-p)} + i_{\frac{N}{2}-k}^{(N-p)} = j\,Y_k(D_k\cos\Phi - C_k\sin\Phi)\,2\cos\left(p\frac{2k\pi}{N}\right) + j\,Y_{\frac{N}{2}-k}\left(D_{\frac{N}{2}-k}\cos\Phi - C_{\frac{N}{2}-k}\sin\Phi\right) \times 2\cos p\pi\left(1-\frac{2k}{N}\right).$$

Nous appellerons $I_k^{(p)} = i_k^{(p)} + i_{\frac{N}{2}}^{(p)}$ « composante k de l'intensité relative au doigt p ».

Étude des oscillations du second type. Expression des composantes des intensités.

Les relations (21), (22), (23), (24) jointes aux conditions (17), (18) donnent :

$$(27)\quad i_k^{(p)} + i_{\frac{N}{2}-k}^{(p)} = 2\,Y_k(D_k\cos\Phi - C_k\sin\Phi)\sin p\psi_k - 2\,Y_{\frac{N}{2}-k}(D'_k\cos\Phi - C'_k\sin\Phi)\sin p(\pi-\psi_k);$$

$$(28)\quad i_k^{(N-p)} + i_{\frac{N}{2}-k}^{(N-p)} = -2\,Y_k(D_k\cos\Phi - C_k\sin\Phi)\sin p\psi_k + 2\,Y_{\frac{N}{2}-k}(D'_k\cos\Phi - C'_k\sin\Phi)\sin p(\pi-\psi_k).$$

2.1.2. Écriture des conditions aux limites du demi-espace supérieur pour $z = +\frac{h}{2}$, $\Phi = \frac{\Phi_0}{2}$.

a. Oscillations du premier type.

En se reportant au schéma 5 conforme à la figure 3, on voit qu'elles s'écrivent :

$$(29)\quad v^{(2p)}\left(+\frac{\Phi_0}{2}\right) = 0,$$

$$(30)\quad i^{(2p+1)}\left(+\frac{\Phi_0}{2}\right) = 0.$$

Ces égalités concernent la tension totale et l'intensité totale pour le doigt considéré. Nous les appliquerons comme déjà vu plus haut à chaque compo-

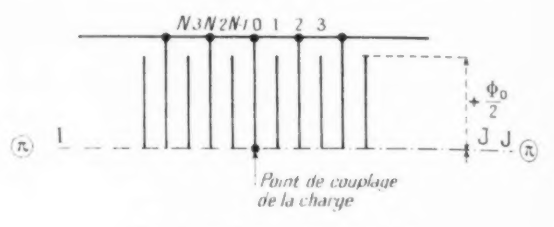


Fig. 5. — Demi-espace supérieur vu de l'espace d'interaction.

sante k vu l'irréductibilité réciproque des modes propres. Il vient donc :

$$(31)\quad v_k^{(2p)} + v_{\frac{N}{2}-k}^{(2p)} = 0 \quad \text{pour} \quad \Phi = +\frac{\Phi_0}{2},$$

$$(32)\quad i_k^{(2p+1)} + i_{\frac{N}{2}-k}^{(2p+1)} = 0 \quad \text{pour} \quad \Phi = +\frac{\Phi_0}{2},$$

c'est-à-dire :

$$(33)\quad C_k\cos\frac{\Phi_0}{2} + D_k\sin\frac{\Phi_0}{2} + C_{\frac{N}{2}-k}\cos\frac{\Phi_0}{2} + D_{\frac{N}{2}-k}\sin\frac{\Phi_0}{2} = 0,$$

$$(34)\quad Y_k\left(D_k\cos\frac{\Phi_0}{2} - C_k\sin\frac{\Phi_0}{2}\right) - Y_{\frac{N}{2}-k}\left(D_k\cos\frac{\Phi_0}{2} - C_{\frac{N}{2}-k}\sin\frac{\Phi_0}{2}\right) = 0.$$

d'où $C_{\frac{N}{2}-k}$ et $D_{\frac{N}{2}-k}$ en fonction de C_k et D_k

$$(35)\quad C_{\frac{N}{2}-k} = -C_k\left[\cos^2\frac{\Phi_0}{2} - \frac{Y_k}{Y_{\frac{N}{2}-k}}\sin^2\frac{\Phi_0}{2}\right] - D_k\sin\frac{\Phi_0}{2}\cos\frac{\Phi_0}{2}\left(1+\frac{Y_k}{Y_{\frac{N}{2}-k}}\right),$$

$$(36)\quad D_{\frac{N}{2}-k} = -C_k\sin\frac{\Phi_0}{2}\cos\frac{\Phi_0}{2}\left(1+\frac{Y_k}{Y_{\frac{N}{2}-k}}\right) - D_k\left[\sin^2\frac{\Phi_0}{2} - \frac{Y_k}{Y_{\frac{N}{2}-k}}\cos^2\frac{\Phi_0}{2}\right],$$

Les espaces (1) et (2) se raccordant dans le plan médian du tube, nous rechercherons les expressions des composantes k du potentiel et de l'intensité dans ce plan. Il vient successivement en omettant le facteur 2 qui intervient de façon homogène dans les expressions de $I_k^{(p)}$ et $V_k^{(p)}$ des deux types

d'oscillation

$$(37)\quad \left[v_k^{(p)} + v_{\frac{N}{2}-k}^{(p)}\right]_{\Phi=0} = C_k \cos p\psi_k + C_{\frac{N}{2}-k} \cos p(\pi - \psi_k),$$

$$(38)\quad \left[i_k^{(p)} + i_{\frac{N}{2}-k}^{(p)}\right]_{\Phi=0} = j Y_k D_k \cos p\psi_k + j Y_{\frac{N}{2}-k} D_{\frac{N}{2}-k} \cos p(\pi - \psi_k),$$

c'est-à-dire

$$(39)\quad V_k^{(p)}\big|_{\Phi=0} = C_k\left[\cos p\psi_k - \left(\cos^2\frac{\Phi_0}{2} - \frac{Y_k}{Y_{\frac{N}{2}-k}}\sin^2\frac{\Phi_0}{2}\right)\cos p(\pi-\psi_k)\right] - \sin\frac{\Phi_0}{2}\cos\frac{\Phi_0}{2} D_k\left(1 + \frac{Y_k}{Y_{\frac{N}{2}-k}}\right)\cos p(\pi-\psi_k),$$

$$(40)\quad I_k^{(p)}\big|_{\Phi=0} = -jC_k Y_{\frac{N}{2}-k}\left(1 + \frac{Y_k}{Y_{\frac{N}{2}-k}}\right)\sin\frac{\Phi_0}{2}\cos\frac{\Phi_0}{2}\cos p(\pi-\psi_k)$$
$$+ jD_k\left[Y_k \cos p\psi_k + Y_{\frac{N}{2}-k}\left(\sin^2\frac{\Phi_0}{2} - \frac{Y_k}{Y_{\frac{N}{2}-k}}\cos^2\frac{\Phi_0}{2}\right)\cos p(\pi-\psi_k)\right].$$

Dans ces expressions, nous rappelons que :

p varie de o à $\frac{N}{2}$ par valeurs entières limites comprises;

k varie de o à $\frac{N}{4}$ ou $\frac{N-2}{4}$ par valeurs entières limites comprises.

b. Oscillations du second type.

Les conditions aux limites donnent

$$(41)\quad C_{\frac{N}{2}-k} = C_k\left[\cos^2\frac{\Phi_0}{2} - \frac{Y_k}{Y_{\frac{N}{2}-k}}\sin^2\frac{\Phi_0}{2}\right] + D_k\left(1 + \frac{Y_k}{Y_{\frac{N}{2}-k}}\right)\sin\frac{\Phi_0}{2}\cos\frac{\Phi_0}{2},$$

$$(42)\quad D_{\frac{N}{2}-k} = C_k\left(1 + \frac{Y_k}{Y_{\frac{N}{2}-k}}\right)\sin\frac{\Phi_0}{2}\cos\frac{\Phi_0}{2} + D_k\left[\sin^2\frac{\Phi_0}{2} - \frac{Y_k}{Y_{\frac{N}{2}-k}}\cos^2\frac{\Phi_0}{2}\right].$$

On arrive alors aux expressions suivantes en omettant le facteur 2 comme nous l'avons précisé plus haut :

$$(43)\quad V_k^{(p)}\big|_{\Phi=0} = -jC_k\left[\sin p\psi_k + \left(\cos^2\frac{\Phi_0}{2} - \frac{Y_k}{Y_{\frac{N}{2}-k}}\sin^2\frac{\Phi_0}{2}\right)\sin p(\pi-\psi_k)\right]$$
$$- jD_k\left(1 + \frac{Y_k}{Y_{\frac{N}{2}-k}}\right)\sin\frac{\Phi_0}{2}\cos\frac{\Phi_0}{2}\sin p(\pi-\psi_k),$$

$$(44)\quad I_k^{(p)}\big|_{\Phi=0} = C_k\left(1 + \frac{Y_k}{Y_{\frac{N}{2}-k}}\right)\sin\frac{\Phi_0}{2}\cos\frac{\Phi_0}{2} Y_{\frac{N}{2}-k}\sin p(\pi-\psi_k)$$
$$+ D_k\left[Y_k \sin p\psi_k + \left(Y_{\frac{N}{2}-k}\sin^2\frac{\Phi_0}{2} - Y_k\cos^2\frac{\Phi_0}{2}\right)\sin p(\pi-\psi_k)\right];$$

p et k varient comme dans le cas du premier type.

2.2. ÉTUDE DU DEMI-ESPACE INFERIEUR (*fig.* 4).

Les tensions et les intensités sont étudiées dans le demi-espace inférieur de la même manière que dans le demi-espace supérieur.

2.2.1. Expressions des composantes de tension et d'intensité.

Les expressions générales, indépendantes des conditions aux limites sont exactement les mêmes, pour les deux types d'oscillation que pour le demi-espace supérieur, les coefficients étant Γ, Δ, Γ', Δ' au lieu de C, D, C', D'.

2.2.2. Écriture des conditions aux limites du demi-espace inférieur pour $Z = -\frac{h}{2}$ et $\Phi = -\frac{\Phi_0}{2}$ (*voir* schéma 6).

a. Oscillations du premier type.

On doit avoir

$$(45)\quad \left[v_k^{(2p+1)} + v_{\frac{N}{2}-k}^{(2p+1)}\right] = 0 \quad \text{pour} \quad \Phi = -\frac{\Phi_0}{2},$$

$$(46)\quad \left[i_k^{(2p)} + i_{\frac{N}{2}-k}^{(2p)}\right] = 0 \quad \text{pour} \quad \Phi = -\frac{\Phi_0}{2},$$

d'où les deux équations

$$(47)\quad \Gamma_k \cos\frac{\Phi_0}{2} - \Delta_k \sin\frac{\Phi_0}{2} - \Gamma_{\frac{N}{2}-k}\cos\frac{\Phi_0}{2} + \Delta_{\frac{N}{2}-k}\sin\frac{\Phi_0}{2} = 0.$$

$$(48)\quad Y_k\left(\Delta_k\cos\frac{\Phi_0}{2} + \Gamma_k\sin\frac{\Phi_0}{2}\right) + Y_{\frac{N}{2}-k}\left(\Delta_{\frac{N}{2}-k}\cos\frac{\Phi_0}{2} + \Gamma_{\frac{N}{2}-k}\sin\frac{\Phi_0}{2}\right) = 0.$$

On en déduit

$$(49)\quad \Gamma_{\frac{N}{2}-k} = \Gamma_k\left[\cos^2\frac{\Phi_0}{2} - \frac{Y_k}{Y_{\frac{N}{2}-k}}\sin^2\frac{\Phi_0}{2}\right] - \Delta_k\sin\frac{\Phi_0}{2}\cos\frac{\Phi_0}{2}\left(1+\frac{Y_k}{Y_{\frac{N}{2}-k}}\right).$$

$$(50)\quad \Delta_{\frac{N}{2}-k} = -\Gamma_k\sin\frac{\Phi_0}{2}\cos\frac{\Phi_0}{2}\left(1+\frac{Y_k}{Y_{\frac{N}{2}-k}}\right) + \Delta_k\left[\sin^2\frac{\Phi_0}{2} - \frac{Y_k}{Y_{\frac{N}{2}-k}}\cos^2\frac{\Phi_0}{2}\right].$$

Dans le plan de raccordement des deux espaces, à partir des équations (37) et (38) écrites avec les Γ

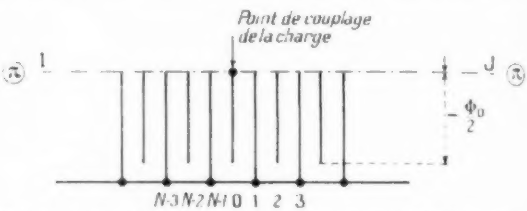


Fig. 6. — Demi-espace inférieur vu de l'espace d'interaction.

et Δ on obtient en omettant le facteur 2 comme il a déjà été spécifié :

$$(51)\quad U_k^{p}\big|_{\Phi=0} = \Gamma_k\left[\cos p\psi_k + \left(\cos^2\frac{\Phi_0}{2} - \frac{Y_k}{Y_{\frac{N}{2}-k}}\sin^2\frac{\Phi_0}{2}\right)\cos p(\pi-\psi_k)\right] - \Delta_k\left(1+\frac{Y_k}{Y_{\frac{N}{2}-k}}\right)\sin\frac{\Phi_0}{2}\cos\frac{\Phi_0}{2}\cos p(\pi-\psi_k),$$

$$(52)\quad J_k^{(p)}\big|_{\Phi=0} = -j\Gamma_k\left(Y_k + Y_{\frac{N}{2}-k}\right)\sin\frac{\Phi_0}{2}\cos\frac{\Phi_0}{2}\cos p(\pi-\psi_k) + j\Delta_k\left[Y_k\cos p\psi_k + \left(Y_{\frac{N}{2}-k}\sin^2\frac{\Phi_0}{2} - Y_k\cos^2\frac{\Phi_0}{2}\right)\cos p(\pi-\psi_k)\right].$$

p et k varient comme dans le cas du premier type.

b. Oscillations du second type.

Les conditions aux limites sont toujours données par (45) et (46). Elles donnent :

$$(53)\quad \Gamma_{\frac{N}{2}-k} = -\Gamma_k\left(\cos^2\frac{\Phi_0}{2} - \frac{Y_k}{Y_{\frac{N}{2}-k}}\sin^2\frac{\Phi_0}{2}\right) + \Delta_k\left(1+\frac{Y_k}{Y_{\frac{N}{2}-k}}\right)\sin\frac{\Phi_0}{2}\cos\frac{\Phi_0}{2},$$

$$(54)\quad \Delta_{\frac{N}{2}-k} = \Gamma_k\left(1+\frac{Y_k}{Y_{\frac{N}{2}-k}}\right)\sin\frac{\Phi_0}{2}\cos\frac{\Phi_0}{2} - \Delta_k\left(\sin^2\frac{\Phi_0}{2} - \frac{Y_k}{Y_{\frac{N}{2}-k}}\cos^2\frac{\Phi_0}{2}\right).$$

Dans le plan de raccordement des deux espaces, on obtient :

$$(55)\quad U_k^{p}\big|_{\Phi=0} = -j\Gamma_k\left[\sin p\psi_k - \left(\cos^2\frac{\Phi_0}{2} - \frac{Y_k}{Y_{\frac{N}{2}-k}}\sin^2\frac{\Phi_0}{2}\right)\sin p(\pi-\psi_k)\right] - j\Delta_k\left(1+\frac{Y_k}{Y_{\frac{N}{2}-k}}\right)\sin\frac{\Phi_0}{2}\cos\frac{\Phi_0}{2}\sin p(\pi-\psi_k),$$

$$(56)\quad J_k^{p}\big|_{\Phi=0} = \Gamma_k\left(Y_k + Y_{\frac{N}{2}-k}\right)\sin\frac{\Phi_0}{2}\cos\frac{\Phi_0}{2}\sin p(\pi-\psi_k) + \Delta_k\left[Y_k\sin p\psi_k - \left(\sin^2\frac{\Phi_0}{2}\,Y_{\frac{N}{2}-k} - Y_k\cos^2\frac{\Phi_0}{2}\right)\cos p(\pi-\psi_k)\right].$$

p et k varient comme dans le cas du premier type.

2.3 EXPRESSION DES CONDITIONS DE RACCORDEMENT DES DEMI-ESPACES SUPÉRIEUR ET INFÉRIEUR.

Avec les relations (39), (40), (43), (44), (51), (52), (55), (56), nous sommes en possession de tous les éléments nécessaires à l'écriture du raccordement. Nous ferons toutefois une remarque préliminaire.

REMARQUE PRÉLIMINAIRE.

Oscillations du premier type (oscillations dites symétriques). — Les équations (35), (36) d'une part, et (49), (50) d'autre part, valables respectivement pour les deux demi-espaces, donnent dans le cas où $\frac{N}{2}$

est pair des relations entre $C_{\frac{N}{4}}$ et $D_{\frac{N}{4}}$, $\Gamma_{\frac{N}{4}}$ et $\Delta_{\frac{N}{4}}$, relations que nous écrirons ici :

$$C_{\frac{N}{4}} \cos\frac{\Phi_0}{2} + D_{\frac{N}{4}} \sin\frac{\Phi_0}{2} = 0, \tag{57}$$

$$\Gamma_{\frac{N}{4}} \sin\frac{\Phi_0}{2} + \Delta_{\frac{N}{4}} \cos\frac{\Phi_0}{2} = 0. \tag{58}$$

Oscillations du second type (oscillations dites antisymétriques). — Les équations (41)-(42) et (53)-54) donnent

$$C_{\frac{N}{4}} \sin\frac{\Phi_0}{2} - D_{\frac{N}{4}} \cos\frac{\Phi_0}{2} = 0, \tag{59}$$

$$\Gamma_{\frac{N}{4}} \cos\frac{\Phi_0}{2} - \Delta_{\frac{N}{4}} \sin\frac{\Phi_0}{2} = 0. \tag{60}$$

Comme conséquence des quatre relations précédentes, il nous faudra considérer séparément les structures pour lesquelles $\frac{N}{2}$ est impair et $\frac{N}{2}$ pair.

Examinons ce point en ce qui concerne les oscillations du premier type. Les oscillations du second type seront étudiées plus loin. Les équations de raccordement sont alors au nombre de :

$\frac{N}{2} + 1$ égalités de tension,

$\frac{N}{2} + 1$ égalités d'intensités,

soit $N + 2$ égalités au total.

Les inconnues sont au nombre de :

a. Cas $\frac{N}{2}$ impair :

$\frac{N+2}{4}$ coefficients C_k : $k = 0, 1, \ldots, \frac{N-2}{4}$;

$\frac{N+2}{4}$ » D_k : $k = 0, 1, \ldots, \frac{N-2}{4}$;

$\frac{N+2}{4}$ » Γ_k : $k = 0, 1, \ldots, \frac{N-2}{4}$;

$\frac{N+2}{4}$ » Δ_k : $k = 0, 1, \ldots, \frac{N-2}{4}$,

soit en tout $N + 2$ inconnues déterminées par les $N + 2$ équations.

b. Cas $\frac{N}{2}$ pair :

$\frac{N}{4} + 1$ coefficients C_k : $k = 0, 1, \ldots, \frac{N}{4}$;

$\frac{N}{4} + 1$ » Γ_k : $k = 0, 1, \ldots, \frac{N}{4}$;

mais étant données les équations (57) et (58) :

$\frac{N}{4}$ coefficients D_k : $k = 0, 1, \ldots, \frac{N}{4} - 1$;

$\frac{N}{4}$ » Δ_k : $k = 0, 1, \ldots, \frac{N}{4} - 1$,

soit encore $N + 2$ inconnues. Le décompte précédent est donc valable quel que soit le type des oscillations considéré.

2.3.1. Écriture des conditions aux limites pour les oscillations du premier type.

A. Cas $\frac{N}{2}$ impair. — On doit avoir

$$\sum_{k=0}^{\frac{N-2}{4}} V_k^p = \sum_{k=0}^{\frac{N-2}{4}} U_k^p \quad \text{pour} \quad 0 \leq p \leq \frac{N}{2}, \tag{61}$$

$$\sum_{k=0}^{\frac{N-2}{4}} I_k^p = \sum_{k=0}^{\frac{N-2}{4}} J_k^p \quad \text{pour} \quad 0 < p \leq \frac{N}{2}. \tag{62}$$

Pour $p = 0$, il faut tenir compte de la charge. En se reportant à la figure 7 qui donne la composition des intensités, les sens positifs dans les deux demi-espaces étant les mêmes, il vient :

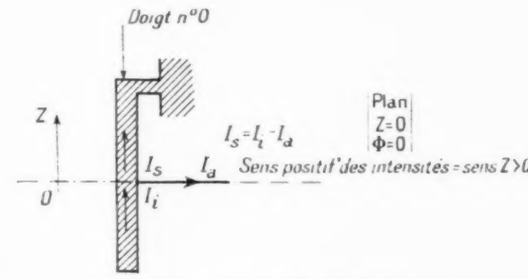


Fig. 7. — Composition des intensités sur le doigt de couplage.

$$\sum_{k=0}^{\frac{N-2}{4}} I_k^0 = \sum_{k=0}^{\frac{N-2}{4}} J_k^0 - j\frac{A}{2}\left[\sum_{k=0}^{\frac{N-2}{4}} V_k^0 + \sum_{k=0}^{\frac{N-2}{4}} U_k^0\right] \tag{63}$$

Nous écrirons la valeur de la tension au point de couplage sous la forme

$$\frac{1}{2}\left[\sum_{k=0} V_k^{(0)} + \sum_{k=0} U_k^0\right]$$

pour respecter la symétrie du problème, l'égalité des deux symboles $\sum$ ayant été écrite en (61).

Les équations (61), (62) et (63) donnent :

Égalité des tensions :

$$(64)\quad \sum_{k=0}^{k=\frac{N-2}{4}} C_k\left[\cos p\psi_k-\left(\cos^2\frac{\Phi_0}{2}-\frac{Y_k}{Y_{\frac{N}{2}-k}}\sin^2\frac{\Phi_0}{2}\right)\cos p(\pi-\psi_k)\right]$$

$$-\sin\frac{\Phi_0}{2}\cos\frac{\Phi_0}{2}\sum_{k=0}^{\frac{N-2}{4}} D_k\left(1+\frac{Y_k}{Y_{\frac{N}{2}-k}}\right)\cos p(\pi-\psi_k)$$

$$=\sum_{k=0}^{\frac{N-2}{4}} \Gamma_k\left[\cos p\psi_k+\left(\cos^2\frac{\Phi_0}{2}-\frac{Y_k}{Y_{\frac{N}{2}-k}}\sin^2\frac{\Phi_0}{2}\right)\cos p(\pi-\psi_k)\right]$$

$$-\sin\frac{\Phi_0}{2}\cos\frac{\Phi_0}{2}\sum_{k=0}^{\frac{N-2}{4}} \Delta_k\left(1+\frac{Y_k}{Y_{\frac{N}{2}-k}}\right)\cos p(\pi-\psi_k);$$

Égalité des intensités :

$$(65)\quad -j\sin\frac{\Phi_0}{2}\cos\frac{\Phi_0}{2}\sum_{k=0}^{\frac{N-2}{4}} C_k\left(Y_{\frac{N}{2}-k}+Y_k\right)\cos p(\pi-\psi_k)$$

$$+j\sum_{k=0}^{\frac{N-2}{4}} D_k\left[Y_k\cos p\psi_k-\left(Y_{\frac{N}{2}-k}\sin^2\frac{\Phi_0}{2}\right.\right.$$

$$\left.\left.-Y_k\cos^2\frac{\Phi_0}{2}\right)\cos(\pi-\psi_k)\right]$$

$$=-j\sin\frac{\Phi_0}{2}\cos\frac{\Phi_0}{2}\sum_{k=0}^{\frac{N-2}{4}} \Gamma_k\left(Y_k+Y_{\frac{N}{2}-k}\right)\cos p(\pi-\psi_k)$$

$$+j\sum_{k=0}^{\frac{N-2}{4}} \Delta_k\left[Y_k\cos p\psi_k+\left(Y_{\frac{N}{2}-k}\sin^2\frac{\Phi_0}{2}\right.\right.$$

$$\left.\left.-Y\cos^2\frac{\Phi_0}{2}\right)\cos(\pi-\psi_k)\right];$$

Pour le doigt $p = 0$:

$$(66)\quad -j\sin\frac{\Phi_0}{2}\cos\frac{\Phi_0}{2}\sum_{k=0}^{\frac{N-2}{4}} C_k\left(Y_k+Y_{\frac{N}{2}-k}\right)$$

$$+j\sum_{k=0}^{\frac{N-2}{4}} D_k\left[Y_k-\left(Y_{\frac{N}{2}-k}\sin^2\frac{\Phi_0}{2}-Y_k\cos^2\frac{\Phi_0}{2}\right)\right]$$

$$=-j\sin\frac{\Phi_0}{2}\cos\frac{\Phi_0}{2}\sum_{k=0}^{\frac{N-2}{4}} \Gamma_k\left(Y_k+Y_{\frac{N}{2}-k}\right)$$

$$+j\sum_{k=0}^{\frac{N-2}{4}} \Delta_k\left[Y_k+\left(Y_{\frac{N}{2}-k}\sin^2\frac{\Phi_0}{2}-Y_k\cos^2\frac{\Phi_0}{2}\right)\right]$$

$$-j\frac{1}{2}\left\{\sum_{k=0}^{\frac{N-2}{4}} Q_k-\sum_{k=0}^{\frac{N-2}{4}}\left(\cos^2\frac{\Phi_0}{2}-\frac{Y_k}{Y_{\frac{N}{2}-k}}\sin^2\frac{\Phi_0}{2}\right)P_k\right.$$

$$\left.-\sin\frac{\Phi_0}{2}\cos\frac{\Phi_0}{2}\sum_{k=0}^{\frac{N-2}{4}}\left(1+\frac{Y_k}{Y_{\frac{N}{2}-k}}\right)S_k\right\}.$$

Pour écrire cette dernière égalité, on a posé :

$$(66\ bis)\quad \begin{cases} C_k-\Gamma_k=P_k, \\ C_k+\Gamma_k=Q_k, \\ D_k-\Delta_k=R_k, \\ D_k+\Delta_k=S_k. \end{cases}$$

En introduisant ces nouvelles inconnues, le système devient :

$$(67)\quad \sum_{k=0}^{\frac{N-2}{4}} P_k\cos p\psi_k$$

$$-\sum_{k=0}^{\frac{N-2}{4}}\left(\cos^2\frac{\Phi_0}{2}-\frac{Y_k}{Y_{\frac{N}{2}-k}}\sin^2\frac{\Phi_0}{2}\right)Q_k\cos p(\pi-\psi_k)$$

$$-\sin\frac{\Phi_0}{2}\cos\frac{\Phi_0}{2}\sum_{k=0}^{\frac{N-2}{4}} R_k\left(1+\frac{Y_k}{Y_{\frac{N}{2}-k}}\right)\cos p(\pi-\psi_k)=0.$$

$$(68)\quad \sin\frac{\Phi_0}{2}\cos\frac{\Phi_0}{2}\sum_{k=0}^{\frac{N-2}{4}}\left(Y_k+Y_{\frac{N}{2}-k}\right)P_k\cos p(\pi-\psi_k)$$

$$-\sum_{k=0}^{\frac{N-2}{4}} Y_k R_k\cos p\psi_k$$

$$+\sum_{k=0}^{\frac{N-2}{4}}\left(Y_{\frac{N}{2}-k}\sin^2\frac{\Phi_0}{2}\right.$$

$$\left.-Y_k\cos^2\frac{\Phi_0}{2}\right)S_k\cos p(\pi-\psi_k)=0,$$

$$(69)\quad \sin\frac{\Phi_0}{2}\cos\frac{\Phi_0}{2}\sum_{k=0}^{\frac{N-2}{4}}\left(Y_k+Y_{\frac{N}{2}-k}\right)P_k-\sum_{k=0}^{\frac{N-2}{4}} Y_k R_k$$

$$+\sum_{k=0}^{\frac{N-2}{4}}\left(Y_{\frac{N}{2}-k}\sin^2\frac{\Phi_0}{2}-Y_k\cos^2\frac{\Phi_0}{2}\right)S_k$$

$$-\frac{1}{2}\left\{\sum_{k=0}^{\frac{N-2}{4}} Q_k-\sum_{k=0}^{\frac{N-2}{4}}\left(\cos^2\frac{\Phi_0}{2}-\frac{Y_k}{Y_{\frac{N}{2}-k}}\sin^2\frac{\Phi_0}{2}\right)P_k\right.$$

$$\left.-\sin\frac{\Phi_0}{2}\cos\frac{\Phi_0}{2}\sum_{k=0}^{\frac{N-2}{4}}\left(1+\frac{Y_k}{Y_{\frac{N}{2}-k}}\right)S_k\right\}=0.$$

La résolution des équations (67), (68) et (69) donnera les coefficients P_k, Q_k, R_k, S_k d'où l'on déduira à l'aide des relations (66 *bis*) C_k, D_k, Γ_k, Δ_k qui permettront de déterminer complètement les champs à l'intérieur de la cavité.

La condition de compatibilité des équations (67), (68), (69) donne la condition de résonance du bloc

anodique chargé. Elle prend la forme d'une équation linéaire en A :

$$\Delta + \frac{A}{2}\Delta' = 0. \tag{70}$$

A ce stade de l'étude, il est clair que le développement des calculs sera, pour une question de place, difficile à transcrire. Ceux-ci peuvent être poussés jusqu'à l'obtention des relations que l'on cherche en employant les méthodes classiques du calcul des déterminants. Nous donnerons donc seulement les résultats finaux ainsi que les étapes intermédiaires dans la mesure où nous ne serons pas entraînés à des développements trop importants.

a. Hypothèse $\frac{N-2}{4}$ *pair.* — Le déterminant Δ peut être calculé complètement.

On trouve tous calculs faits :

$$\begin{aligned}\Delta = -2^{\frac{N-2}{2}}\left(Y_0Y_1Y_2\dots Y_{\frac{N-2}{4}}\right)^2 F_0F_1F_2\dots F_{\frac{N}{2}-1}F_{\frac{N}{2}}\,2^{\frac{(N-2)(N-6)}{8}} \Big[&(\cos\psi_1+1)(\cos\psi_2-1)(\cos\psi_3+1)\dots\left(\cos\psi_{\frac{N-2}{4}}-1\right)\\ &(\cos\psi_2+\cos\psi_1)(\cos\psi_3-\psi_1)\dots\left(\cos\psi_{\frac{N-2}{4}}+\cos\psi_1\right)\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ &\left(\cos\psi_{\frac{N-2}{4}}+\cos\psi_{\frac{N-6}{4}}\right)\Big]^4.\end{aligned} \tag{71}$$

Dans cette expression, on a posé :

$$F_k = \cos^2\frac{\Phi_0}{2} - \frac{Y_k}{Y_{\frac{N}{2}-k}}\sin^2\frac{\Phi_0}{2}. \tag{72}$$

Nous formerons Δ' de façon analogue. Néanmoins pour plus de simplicité nous expliciterons le facteur $\frac{\Delta'}{\Delta}$ correspondant à l'équation (70) mise sous la forme :

$$1 + \frac{A}{2}\frac{\Delta'}{\Delta} = 0. \tag{73}$$

Il vient dans ces conditions :

$$\begin{aligned}\frac{\Delta'}{\Delta} = -\frac{1}{2}\sin\frac{\Phi_0}{2}\cos\frac{\Phi_0}{2} \times\Big[&\left(Z_0+Z_{\frac{N}{2}}\right)\left(F_0^{-1}+F_{\frac{N}{2}}^{-1}\right)\frac{M_{11}}{\delta_1}\\ &+\left(Z_1+Z_{\frac{N}{2}-1}\right)\left(F_1+F_{\frac{N}{2}-1}\right)\frac{M_{12}}{\delta_1}\dots\\ &+\left(Z_{\frac{N-2}{4}}+Z_{\frac{N+2}{4}}\right)\left(F_{\frac{N-2}{4}}^{-1}+F_{\frac{N+2}{4}}^{-1}\right)\frac{M_{1,\frac{N-2}{4}}}{\delta_1}\Big].\end{aligned} \tag{74}$$

En posant

$$Z_k = \frac{1}{Y_k}. \tag{75}$$

Les quantités M_{1p} étant les mineurs relatifs à la première ligne du déterminant δ_1 égal à

$$\delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & \dots & 1\\ 1 & \cos\psi_1 & \cos\psi_2 & \cos\psi_3 & \dots & \cos\psi_{\frac{N-2}{4}}\\ 1 & -\cos 2\psi_1 & \cos 2\psi_2 & -\cos 2\psi_3 & \dots & +\cos 2\psi_{\frac{N-2}{4}}\\ . & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots\\ 1 & -\cos\frac{N-2}{4}\psi_1 & \cos\frac{N-2}{4}\psi_2 & -\cos\frac{N-2}{4}\psi_3 & \dots & \cos\frac{N-2}{4}\psi_{\frac{N-2}{4}}\end{vmatrix} \tag{76}$$

On peut montrer que δ_1 est é gal à

$$\begin{aligned}\delta_1 = 2^{\frac{(N-2)(N-6)}{32}}&(1+\cos\psi_1)(-1+\cos\psi_2)(1+\cos\psi_3)\dots\left(-1+\cos\psi_{\frac{N-2}{4}}\right)\\ &(\cos\psi_1+\cos\psi_2)(-\cos\psi_1+\cos\psi_3)\dots\left(\cos\psi_1+\cos\psi_{\frac{N-2}{4}}\right)\\ &(\cos\psi_2+\cos\psi_3)\dots\left(-\cos\psi_2+\cos\psi_{\frac{N-2}{4}}\right)\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ &\left(\cos\psi_{\frac{N-6}{4}}+\cos\psi_{\frac{N-2}{4}}\right).\end{aligned} \tag{76 bis}$$

En posant $Z = A^{-1}$, on peut écrire la condition de compatibilité des équations (67), (68) et (69) sous la forme :

$$(77)\quad 8Z = \sin\Phi_0\Bigg[\left(Z_0 + Z_{\frac{N}{2}}\right)\left(F_0^{-1} + F_{\frac{N}{2}}^{-1}\right)\frac{M_{11}}{\delta_1} + \left(Z_1 + Z_{\frac{N}{2}-1}\right)\left(F_1^{-1} + F_{\frac{N}{2}-1}^{-1}\right)\frac{M_{12}}{\delta_1} + \ldots + \left(Z_{\frac{N-2}{4}} + Z_{\frac{N+2}{4}}\right)\left(F_{\frac{N-2}{2}}^{-1} + F_{\frac{N+2}{4}}^{-1}\right)\frac{M_{1,\frac{N-2}{4}}}{\delta_1}\Bigg].$$

On voit immédiatement que si le tube n'est pas chargé, $A = 0$ ou $Z = \infty$ les fréquences de résonances sont données par :

$$(78)\qquad F_k = \cos^2\frac{\Phi_0}{2} - \frac{Y_k}{Y_{\frac{N}{2}-k}}\sin^2\frac{\Phi_0}{2} = 0.$$

k pouvant prendre toutes les valeurs entre 0 et $\frac{N}{2}$ limites comprises.

Cette équation est l'équation classique de résonance de la ligne non chargée. La présence de la charge jA engendre donc un glissement de fréquence complètement déterminé par (77).

On peut déterminer graphiquement les nouvelles fréquences de résonance au moyen d'une construction graphique. On trace sur une même feuille, d'une part la courbe $Z(\Phi_0)$ et, d'autre part, celle qui correspond au second membre de l'équation (77), ce qui est possible grâce à l'expression analytique de Z_k donnée en fonction de ψ_k dans une précédente publication [3].

L'exemple d'un tel tracé est donné sur la figure 8.

L'équation (77) fait apparaître ainsi $\left(\frac{N}{2}+1\right)$ fréquences de résonances. Ce chiffre est insuffisant vu que le nombre total doit être égal à N. On verra

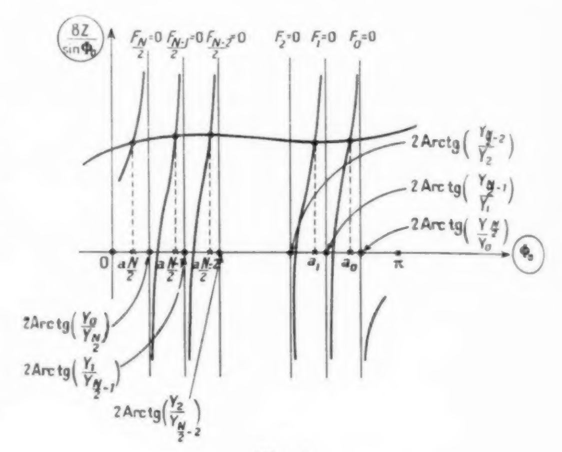


Fig. 8.

que ce sont les oscillations du second type qui fournissent les $\left(\frac{N}{2}-1\right)$ fréquences restantes. Mais comme nous l'indiquerons plus loin les champs correspondants ne sont pas couplés à la charge puisque que tensions et intensités sont nulles dans le plan d'antisymétricité, c'est-à-dire sur le doigt de couplage.

b. Hypothèse $\frac{N-2}{4}$ impair. — Dans ce cas le déterminant Δ a le signe opposé au précédent et se présente de façon formellement analogue. Nous aurons :

$$(79)\quad \Delta = +2^{\frac{N-2}{2}}\left(Y_0Y_1Y_2\ldots Y_{\frac{N-2}{4}}\right)^2\left(F_0F_1F_2\ldots F_{\frac{N}{2}-1}F_{\frac{N}{2}}\right)2^{\frac{(N-2)(N-6)}{8}}\Bigg[(\cos\psi_1+1)(\cos\psi_2-1)\ldots\left(\cos\psi_{\frac{N-2}{2}}+1\right)$$
$$(\cos\psi_2+\cos\psi_1)\ldots\left(\cos\psi_{\frac{N-2}{4}}-\cos\psi_1\right)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\left(\cos\psi_{\frac{N-2}{4}}+\cos\psi_{\frac{N-6}{4}}\right)\Bigg]^2.$$

L'expression de $\frac{\Delta'}{\Delta}$ intervenant dans (73) aura exactement la même forme que (74) soit :

$$(80)\quad \frac{\Delta'}{\Delta} = -\frac{1}{2}\sin\frac{\Phi_0}{2}\cos\frac{\Phi_0}{2}\Bigg[\left(Z_0+Z_{\frac{N}{2}}\right)\left(F_0^{-1}+F_{\frac{N}{2}}^{-1}\right)\frac{M'_{11}}{\delta'_1} + \left(Z_1+Z_{\frac{N}{2}-1}\right)\left(F_1^{-1}+F_{\frac{N}{2}-1}^{-1}\right)\frac{M'_{12}}{\delta'_1} + \ldots + \left(Z_{\frac{N-2}{4}}Z_{\frac{N+2}{4}}\right)\left(F_{\frac{N-2}{4}}^{-1}+F_{\frac{N+2}{4}}^{-1}\right)\frac{M'_{1,\frac{N-2}{4}}}{\delta'_1}\Bigg].$$

Les quantités $M'_{1,p}$ étant les mineurs relatifs à la première ligne du déterminant δ'_1 donné par

l'équation

$$(81)\qquad \delta'_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & \dots & -1 \\ 1 & \cos\psi_1 & \cos\psi_2 & \dots & \cos\psi_{\frac{N-2}{4}} \\ 1 & -\cos 2\psi_1 & \cos 2\psi_2 & \dots & -\cos 2\psi_{\frac{N-2}{4}} \\ . & \dots\dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots\dots\dots \\ 1 & \cos\left(\frac{N-2}{4}\right)\psi_1 & \cos\left(\frac{N-2}{4}\right)\psi_2 & \dots & \cos\left(\frac{N-2}{4}\right)\psi_{\frac{N-2}{4}} \end{vmatrix}.$$

Le déterminant δ'_1 a pour valeur :

$$(81\ bis)\qquad \delta'_1 = 2^{\frac{(N-2)(N-6)}{32}}(1+\cos\psi_1)(-1+\cos\psi_2)(1+\cos\psi_3)\dots\left(1+\cos\psi_{\frac{N-2}{4}}\right)$$
$$(\cos\psi_1+\cos\psi_2)(-\cos\psi_1+\cos\psi_3)\dots\left(-\cos\psi_1+\cos\psi_{\frac{N-2}{4}}\right)$$
$$(\cos\psi_2+\cos\psi_3)\dots\left(\cos\psi_2+\cos\psi_{\frac{N-2}{4}}\right)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\left(\cos\psi_{\frac{N-6}{4}}+\cos\psi_{\frac{N-2}{4}}\right).$$

La condition de résonance s'écrit de façon identique :

$$(82)\qquad 8Z = \sin\Phi_0 \left[\left(Z_0+Z_{\frac{N}{2}}\right)\left(F_1^{-1}+F_{\frac{N}{2}}^{-1}\right)\frac{M'_{11}}{\delta'_1} + \left(Z_1+Z_{\frac{N}{2}-1}\right)\left(F_1^{-1}+F_{\frac{N}{2}-1}^{-1}\right)\frac{M'_{12}}{\delta'_1}+\dots + \left(Z_{\frac{N-2}{4}}+Z_{\frac{N+2}{4}}\right)\left(F_{\frac{N-2}{4}}^{-1}+F_{\frac{N+2}{4}}^{-1}\right)\frac{M'_{1,\frac{N-2}{4}}}{\delta'_1}\right].$$

B. CAS $\frac{N}{2}$ PAIR. — Les équations de départ sont les mêmes que dans le cas $\frac{N}{2}$ impair écrites en (61), (62) et 63).

On utilise toujours les coefficients C_k, D_k, Γ_k, Δ_k. Les égalités (57) et (58) conduisent aux deux relations :

$$(83)\qquad R_{\frac{N}{4}} = -\frac{P_{\frac{N}{4}}}{\sin\Phi_0} - Q_{\frac{N}{4}}\operatorname{cotg}\Phi_0,$$

$$(84)\qquad S_{\frac{N}{4}} = -\frac{Q_{\frac{N}{4}}}{\sin\Phi_0} - P_{\frac{N}{4}}\operatorname{cotg}\Phi_0.$$

On aboutit ainsi aux égalités suivantes :

Égalité des tensions :

$$(85)\qquad \sum_{k=0}^{\frac{N}{4}-1} P_k \cos p\psi_k + P_{\frac{N}{4}}(1+\cos p\pi)\cos p\psi_{\frac{N}{4}}$$
$$\sum_{k=0}^{\frac{N}{4}-1}\left(\cos^2\frac{\Phi_0}{2} - \frac{Y_k}{Y_{\frac{N}{2}-k}}\sin^2\frac{\Phi_0}{2}\right)Q_k\cos p(\pi-\psi_k)$$
$$-\sin\frac{\Phi_0}{2}\cos\frac{\Phi_0}{2}\sum_{k=0}^{\frac{N}{4}-1}R_k\left(1+\frac{Y_k}{Y_{\frac{N}{2}-k}}\right)\cos p(\pi-\psi_k) = 0;$$

Égalité des intensités :

$$(86)\qquad \sin\frac{\Phi_0}{2}\cos\frac{\Phi_0}{2}\sum_{k=0}^{\frac{N}{4}-1}\left(Y_k+Y_{\frac{N}{2}-k}\right)P_k\cos p(\pi-\psi_k)$$
$$+P_{\frac{N}{4}}\frac{Y_{\frac{N}{4}}}{\sin\Phi_0}\left[\cos\psi_{\frac{N}{4}}+\cos p\left(\pi-\psi_{\frac{N}{4}}\right)\right]$$
$$+Q_{\frac{N}{4}}Y_{\frac{N}{4}}\operatorname{cotg}\Phi_0\left[\cos p\,\psi_{\frac{N}{4}}+\cos p\left(\pi-\psi_{\frac{N}{4}}\right)\right]$$
$$-\sum_{k=0}^{\frac{N}{4}-1}Y_kR_k\cos p\psi_k$$
$$+\sum_{k=0}^{\frac{N}{4}-1}\left(Y_{\frac{N}{2}-k}\sin^2\frac{\Phi_0}{2}-Y_k\cos^2\frac{\Phi_0}{2}\right)S_k\cos p(\pi-\psi_k) = 0;$$

Égalité des intensités pour $p = 0$:

$$(87)\qquad \sin\frac{\Phi_0}{2}\cos\frac{\Phi_0}{2}\sum_{k=0}^{\frac{N}{4}-1}\left(Y_k+Y_{\frac{N}{2}-k}\right)P_k$$
$$+\frac{2}{\sin\Phi_0}Y_{\frac{N}{4}}P_{\frac{N}{4}}+2Q_{\frac{N}{4}}Y_{\frac{N}{4}}\operatorname{cotg}\Phi_0-\sum_{k=0}^{\frac{N}{4}-1}Y_kR_k$$
$$+\sum_{k=0}^{\frac{N}{4}-1}\left(Y_{\frac{N}{2}-k}\sin^2\frac{\Phi_0}{2}-Y_k\cos^2\frac{\Phi_0}{2}\right)S_k$$
$$+\frac{1}{2}\left[-\sum_{k=0}^{\frac{N}{4}-1}Q_k-\sum_{k=0}^{\frac{N}{4}-1}\left(\cos^2\frac{\Phi_0}{2}-\frac{Y_k}{Y_{\frac{N}{2}-k}}\sin^2\frac{\Phi_0}{2}\right)P_k\right.$$
$$\left.+\sin\frac{\Phi_0}{2}\cos\frac{\Phi_0}{2}\sum_{k=0}^{\frac{N}{4}-1}\left(1+\frac{Y_k}{Y_{\frac{N}{2}-k}}\right)S_k-2Q_{\frac{N}{4}}\right]=0.$$

La condition de compatibilité des équations (85), (86) et (87) donnera la condition de résonance du bloc anodique. Elle s'écrira encore sous la forme

$$\Delta + \frac{1}{2}\Delta' = 0. \tag{88}$$

Nous distinguerons encore ici deux cas comme plus haut :

a. Hypothèse $\frac{N}{4}$ *impair.* — Le déterminant Δ peut être calculé complètement.

On trouve :

$$\Delta = 2^{N+2}\left(F_0 F_1 F_2 \ldots F_{\frac{N}{4}-1}\right)^2 F_{\frac{N}{4}} \operatorname{cotg}\Phi_0 \left(F_0 F_1 \ldots F_{\frac{N}{4}-1} F_{\frac{N}{4}+1} \ldots F_{\frac{N}{2}-1} F_{\frac{N}{2}}\right)^{2\frac{(N-4)^2}{8}} \tag{89}$$
$$\times \left(\cos\psi_1 \cos\psi_3 \ldots \cos\psi_{\frac{N}{2}-2}\right)^6 \left(\cos\psi_2 \cos\psi_4 \ldots \cos\psi_{\frac{N}{4}-1}\right)^2$$
$$\times \prod_{s=0}^{\frac{1}{2}\left(\frac{N}{4}-3\right)} (\cos^2\psi_{2k} - \cos^2\psi_{2s})^4 \prod_{s=0}^{\frac{1}{2}\left(\frac{N}{4}-5\right)} (\cos^2\psi_{2k+1} - \cos^2\psi_{2s+1})^4$$
$$\left(\frac{1}{2}\left(\frac{N}{4}-1\right) \geq k > s; \quad \frac{1}{2}\left(\frac{N}{4}-3\right) \geq k > s\right).$$

Où les F_k ont la même signification que précédemment.

Nous formerons Δ' de façon analogue à Δ et nous expliciterons le facteur $\frac{\Delta'}{\Delta}$ correspondant à l'équation (88). Il vient :

$$\frac{\Delta'}{\Delta} = -\frac{1}{2}\sin\frac{\Phi_0}{2}\cos\frac{\Phi_0}{2}\left[\left(Z_0 + Z_{\frac{N}{2}}\right)\left(F_0^{-1} + F_{\frac{N}{2}}^{-1}\right)\frac{M_{11}}{\delta_1} + \left(Z_1 + Z_{\frac{N}{2}-1}\right)\left(F_1^{-1} + F_{\frac{N}{2}-1}^{-1}\right)\frac{M_{12}}{\delta_1} + \ldots\right. \tag{90}$$
$$\left. + \left(Z_{\frac{N}{4}-1} + Z_{\frac{N}{4}+1}\right)\left(F_{\frac{N}{4}-1}^{-1} + F_{\frac{N}{4}+1}^{-1}\right)\frac{M_{1,\frac{N}{4}}}{\delta_1} + \frac{4Z_{\frac{N}{4}}}{\cos\Phi_0}\frac{M_{1,\frac{N}{4}+1}}{\delta_1}\right].$$

Les quantités $M_{1,p}$ sont ici les mineurs relatifs à la première ligne du déterminant δ_1 égal à

$$\delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & \ldots & 1 & -1 \\ 1 & \cos 2\psi_1 & \cos 2\psi_2 & \ldots & \cos 2\psi_{\frac{N}{4}-1} & \cos 2\psi_{\frac{N}{4}} \\ 1 & -\cos 2\psi_1 & \cos 2\psi_2 & \ldots & \cos 2\psi_{\frac{N}{4}-1} & -\cos 2\psi_{\frac{N}{4}} \\ . & \ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ 1 & \cos\left(\frac{N}{4}-1\right)\psi_1 & \cos\left(\frac{N}{4}-1\right)\psi_2 & \ldots & \cos\left(\frac{N}{4}-1\right)\psi_{\frac{N}{4}-1} & \cos\left(\frac{N}{4}-1\right)\psi_{\frac{N}{4}} \\ 1 & -\cos\left(\frac{N}{4}-1\right)\psi_1 & \cos\left(\frac{N}{4}-1\right)\psi_2 & \ldots & \cos\left(\frac{N}{4}-1\right)\psi_{\frac{N}{4}-1} & -\cos\left(\frac{N}{4}-1\right)\psi_{\frac{N}{4}} \end{vmatrix}. \tag{91}$$

Bien que certaines simplifications de forme soient évidentes sur l'expression de δ_1 qui rendraient son calcul plus aisé, nous lui avons conservé cette présentation pour obtenir des équations d'ensemble similaires à celles obtenues pour $\frac{N}{2}$ impair.

On peut montrer que δ_1 a pour valeur :

$$\delta_1 = (-1)^{\frac{1}{2}\left(\frac{N}{4}-1\right)} 2^{\frac{1}{2}\left(\frac{N^2}{16}-1\right)} \left(\cos\psi_2 \cos\psi_4 \ldots \cos\psi_{\frac{N}{4}-1}\right) \tag{92}$$
$$\times \prod_{s=0}^{\frac{1}{2}\left(\frac{N}{4}-3\right)} (\cos^2\psi_{2k} - \cos^2\psi_{2s})^2$$
$$\left(\frac{1}{2}\left(\frac{N}{4}-1\right) \geq k > s\right).$$

La condition de compatibilité des équations (85), (86) et (87) s'écrit alors :

$$8Z = \sin\Phi_0\left[\left(Z_0 + Z_{\frac{N}{2}}\right)\left(F_0^{-1} + F_{\frac{N}{2}}^{-1}\right)\frac{M_{11}}{\delta_1}\right. \tag{93}$$
$$+ \left(Z_1 + Z_{\frac{N}{2}-1}\right)\left(F_1^{-1} + F_{\frac{N}{2}-1}^{-1}\right)\frac{M_{12}}{\delta_1} + \ldots$$
$$+ \left(Z_{\frac{N}{4}-1} + Z_{\frac{N}{4}+1}\right)\left(F_{\frac{N}{4}-1}^{-1} + F_{\frac{N}{4}+1}^{-1}\right)\frac{M_{1,\frac{N}{4}}}{\delta_1}$$
$$\left. + \frac{4Z_{\frac{N}{4}}}{\cos\Phi_0}\frac{M_{1,\frac{N}{4}+1}}{\delta_1}\right].$$

On peut faire sur cette équation les mêmes

remarques que sur l'équation correspondante au cas $\frac{N-2}{4}$ pair. Si $A = 0$ ou $Z = \infty$, les fréquences de résonances sont données par l'équation classique :

$$(78)\qquad F_k = \cos^2\frac{\Phi_0}{2} - \frac{Y_k}{Y_{\frac{N}{2}-k}}\sin^2\frac{\Phi_0}{2} = 0.$$

k pouvant prendre toutes les valeurs entre 0 et $\frac{N}{2}$, limites comprises. On peut procéder à une résolution graphique analogue.

b. Hypothèse $\frac{N}{4}$ pair. — Le déterminant Δ peut être calculé complètement. Son expression est un peu différente de (89). Il vient tous calculs faits :

$$(94)\qquad \Delta = 2^{N+2}\left(Y_0 Y_1 \ldots Y_{\frac{N}{4}-1}\right)^2 Y_{\frac{N}{4}}$$
$$\times \cot\Phi_0\left(F_0 F_1 \ldots F_{\frac{N}{4}-1} F_{\frac{N}{4}+1} \ldots F_{\frac{N}{2}}\right)^{2^{\frac{(N-4)^2}{8}}}$$
$$\times\left(\cos\psi_2\cos\psi_4 \ldots \cos\psi_{\frac{N}{4}-2}\right)^6$$
$$\times\left(\cos\psi_1\cos\psi_3 \ldots \cos\psi_{\frac{N}{4}-1}\right)^2$$
$$\times\prod_{s=0}^{\frac{1}{2}\left(\frac{N}{4}-4\right)}\left(\cos^2\psi_{2k} - \cos^2\psi_{2s}\right)^4$$
$$\times\prod_{s=0}^{\frac{1}{2}\left(\frac{N}{4}-4\right)}\left(\cos^2\psi_{2k+1} - \cos^2\psi_{2s+1}\right)^4$$
$$\left(\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{N}{4}-2\right) \geqq k > s,\ \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{N}{4}-4\right) \geqq k > s\right).$$

On forme encore $\frac{\Delta'}{\Delta}$ en relation avec (88). Il vient :

$$(95)\qquad \frac{\Delta'}{\Delta} = -\frac{1}{2}\sin\frac{\Phi_0}{2}\cos\frac{\Phi_0}{2}$$
$$\times\Bigg[\left(Z_0 + Z_{\frac{N}{2}}\right)\left(F_0^{-1} + F_{\frac{N}{2}}^{-1}\right)\frac{M'_{11}}{\delta'_1}$$
$$+\left(Z_1 + Z_{\frac{N}{2}-1}\right)\left(F_1^{-1} + F_{\frac{N}{2}-1}^{-1}\right)\frac{M'_{12}}{\delta'_1} + \ldots$$
$$+\left(Z_{\frac{N}{4}-1} + Z_{\frac{N}{4}+1}\right)\left(F_{\frac{N}{4}-1}^{-1} + F_{\frac{N}{4}+1}^{-1}\right)\frac{M'_{1,\frac{N}{4}}}{\delta'_1}$$
$$+\frac{4Z_{\frac{N}{4}}}{\cos\Phi_0}\,\frac{M'_{1,\frac{N}{4}+1}}{\delta'_1}\Bigg].$$

Les quantités $M'_{1,p}$ sont les mineurs relatifs à la première ligne du déterminant δ'_1 égal à

$$(96)\qquad \delta'_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & \ldots & -1 & 1 \\ 1 & \cos 2\psi_1 & \cos 2\psi_2 & \ldots & \cos 2\psi_{\frac{N}{4}-1} & \cos 2\psi_{\frac{N}{4}} \\ 1 & -\cos 2\psi_1 & \cos 2\psi_2 & \ldots & -\cos 2\psi_{\frac{N}{4}-1} & \cos 2\psi_{\frac{N}{4}} \\ \cdot & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ 1 & \cos\left(\frac{N}{4}-2\right)\psi_1 & \cos\left(\frac{N}{4}-2\right)\psi_2 & \ldots & \cos\left(\frac{N}{4}+2\right)\psi_{\frac{N}{4}-1} & \cos\left(\frac{N}{4}-2\right)\psi_{\frac{N}{4}} \\ 1 & -\cos\left(\frac{N}{4}-2\right)\psi_1 & \cos\left(\frac{N}{4}-2\right)\psi_2 & \ldots & -\cos\left(\frac{N}{4}-2\right)\psi_{\frac{N}{4}-1} & \cos\left(\frac{N}{4}-2\right)\psi_{\frac{N}{4}} \\ 1 & 0 & \cos\frac{N}{4}\psi_2 & \ldots & 0 & \cos\frac{N}{4}\psi_{\frac{N}{4}} \end{vmatrix}.$$

Le déterminant δ'_1 a pour valeur :

$$(97)\qquad \delta'_1 = 2^{\frac{N^2}{32}}\left(\cos\psi_2\cos\psi_4 \ldots \cos\psi_{\frac{N}{4}-2}\right)^3$$
$$\times\prod_{s=0}^{\frac{1}{2}\left(\frac{N}{4}-4\right)}\left(\cos^2\psi_{2k} - \cos^2\psi_{2s}\right)^2$$
$$\left(\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{N}{4}-2\right) \geqq k > s\right).$$

La condition de résonance s'écrit :

$$(98)\qquad 8Z = \sin\Phi_0$$
$$\times\Bigg[\left(Z_0 + Z_{\frac{N}{2}}\right)\left(F_0^{-1} + F_{\frac{N}{2}}^{-1}\right)\frac{M'_{11}}{\delta'_1}$$
$$+\left(Z_1 + Z_{\frac{N}{2}-1}\right)\left(F_1^{-1} + F_{\frac{N}{2}-1}^{-1}\right)\frac{M'_{12}}{\delta'_1} + \ldots$$
$$+\left(Z_{\frac{N}{4}-1} + Z_{\frac{N}{4}+1}\right)\left(F_{\frac{N}{4}-1}^{-1} + F_{\frac{N}{4}+1}^{-1}\right)\frac{M'_{1,\frac{N}{4}}}{\delta'_1}$$
$$+\frac{4Z_{\frac{N}{4}}}{\cos\Phi_0}\,\frac{M'_{1,\frac{N}{4}-1}}{\delta'_1}\Bigg].$$

Nous avons obtenu au cours de l'analyse précédente quatre conditions de résonance [éq. (77), (82), (93), (98)] correspondant à tous les cas susceptibles d'être rencontrés. Ces équations donnent les fréquences de résonances associées aux oscillations dites du *premier type*. Elles sont au nombre de $\left(\frac{N}{2}+1\right)$ comme nous l'avons déjà indiqué dans l'étude du cas $\frac{N}{2}$ impair, $\frac{N-2}{4}$ pair. Nous allons voir maintenant que les $\left(\frac{N}{2}-1\right)$ restantes sont fournies par les oscillations dites du second type.

2.3.2. Écriture des conditions aux limites pour les oscillations du second type. Condition de résonance.

Si l'on se reporte aux équations (43), (44), (55) et (56) on voit que pour ces oscillations les tensions et intensités développées sur les doigts o et $\frac{N}{2}$ sont nulles. Il s'ensuit que les fréquences de résonances seront indépendantes de la charge. Pour préciser ce point nous utiliserons comme dans le cas des oscillations du premier type, les coefficients P_k, Q_k, R_k, S_k reliés aux C_k, D_k, Γ_k, Δ_k par les relations (66 *bis*).

Il vient alors en considérant seulement pour l'instant le cas $\frac{N}{2}$ impair.

Égalité des tensions :

$$(99)\quad \sum_{k=0}^{\frac{N-2}{4}} P_k \sin p\psi_k + \sum_{k=0}^{\frac{N-2}{4}} \left(\cos^2\frac{\Phi_0}{2} - \frac{Y_k}{Y_{\frac{N}{2}-k}}\sin^2\frac{\Phi_0}{2}\right) Q_k \sin p(\pi-\psi_k) + \sin\frac{\Phi_0}{2}\cos\frac{\Phi_0}{2}\sum_{k=0}^{\frac{N-2}{4}} R_k\left(1+\frac{Y_k}{Y_{\frac{N}{2}-k}}\right)\sin p(\pi-\psi_k) = 0;$$

Égalité des intensités :

$$(100)\quad \sin\frac{\Phi_0}{2}\cos\frac{\Phi_0}{2}\sum_{k=0}^{\frac{N-2}{4}} P_k\left(Y_k+Y_{\frac{N}{2}-k}\right)\sin p(\pi-\psi_k) + \sum_{k=0}^{\frac{N-2}{4}} R_k Y_k \sin p\psi_k + \sum_{k=0}^{\frac{N-2}{4}} S_k\left[Y_{\frac{N}{2}-k}\sin^2\frac{\Phi_0}{2} - Y_k\cos^2\frac{\Phi_0}{2}\right]\sin p(\pi-\psi_k) = 0.$$

Les équations ainsi obtenues sont au nombre de $(N-2)$ puisque pour $p=0$ et $p=\frac{N}{2}$ on obtient des identités. Les inconnues seront au nombre de $4\times\frac{N-2}{4}=N-2$ vu que les termes C_0, Γ_0, D_0, Δ_0 et $C_{\frac{N}{2}}$, $D_{\frac{N}{2}}$, $\Gamma_{\frac{N}{2}}$, $\Delta_{\frac{N}{2}}$ ne peuvent contribuer qu'à des répartitions électromagnétiques du premier type. Les amplitudes sont donc encore une fois complètement déterminées par le système d'équations (99) et (100) à condition que le déterminant des inconnues — condition de résonance — soit nul.

Si l'on écrivait ce déterminant on verrait apparaître tous les facteurs F_k, équation (78), sauf bien entendu F_0 et $F_{\frac{N}{2}}$.

Il s'en suit que le système (99)-(100) sera compatible quand on aura :

$$(78)\qquad F_k = \cos^2\frac{\Phi_0}{2} - \frac{Y_k}{Y_{\frac{N}{2}-k}}\sin^2\frac{\Phi_0}{2} = 0,$$

avec

$$k = 1, 2, 3, \ldots, \frac{N}{2}-1.$$

Ce résultat est vrai non seulement pour $\frac{N}{2}$ impair mais encore pour $\frac{N}{2}$ pair. Il est général. On voit bien ainsi apparaître le « splitting » dû à la charge et l'on a tous les moyens d'en évaluer l'importance. On voit aussi que les oscillations du second type ne sont pas celles qui nous intéressent directement. C'est pourquoi nous ne considérerons dans la suite que les oscillations du premier type ou encore les oscillations symétriques pour lesquelles nous allons maintenant calculer les coefficients P_k, Q_k, R_k, S_k, d'où nous déduirons les amplitudes C_k, D_k, Γ_k, Δ_k.

2.4. — CALCUL DES AMPLITUDES RELATIVES EXCITÉES.

Tous les calculs qui vont suivre sont effectués pour des fréquences particulières, les fréquences de résonance données par les équations (77), (82), (93) ou (98) suivant les cas.

2.4.1. Étude des cas $\frac{N}{2}$ impair.

A. Cas $\frac{N-2}{4}$ pair. — Le système d'équations (67) (68) et (69) est compatible puisque la condition (77) est remplie. On peut alors supprimer une équation du système et donner à une inconnue une valeur

arbitraire, l'unité par exemple. Nous poserons :

$$Q_0 = +1. \tag{101}$$

L'équation que nous supprimerons sera l'équation des intensités sur le doigt de couplage, $p = 0$.

Il nous restera donc le système constitué par l'équation (101) et par les équations (67) et (68) que nous transcrirons ici :

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{\frac{N-2}{4}} P_k \cos p\psi_k \\ &-\sum_{k=0}^{\frac{N-2}{4}} \left(\cos^2 \frac{\Phi_0}{2} - \frac{Y_k}{Y_{\frac{N}{2}-k}} \sin^2 \frac{\Phi_0}{2} \right) Q_0 \cos p(\pi - \psi_k) \\ &- \sin \frac{\Phi_0}{2} \cos \frac{\Phi_0}{2} \sum_{k=0}^{\frac{N-2}{4}} R_k \left(1 + \frac{Y_k}{Y_{\frac{N}{2}-k}} \right) \cos p(\pi - \psi_k) = 0 \\ &\left(p = 0, 1, 2, \ldots, \frac{N}{2} \right). \end{aligned} \tag{67}$$

$$\begin{aligned} &\sin \frac{\Phi_0}{2} \cos \frac{\Phi_0}{2} \sum_{k=0}^{\frac{N-2}{4}} \left(Y_k + Y_{\frac{N}{2}-k} \right) P_k \cos p(\pi - \psi_k) \\ &- \sum_{k=0}^{\frac{N-2}{4}} Y_k R_k \cos p\psi_k \\ &+ \sum_{k=0}^{\frac{N-2}{4}} \left(Y_{\frac{N}{2}-k} \sin^2 \frac{\Phi_0}{2} - Y_k \cos^2 \frac{\Phi_0}{2} \right) S_k \cos p(\pi - \psi_k) = 0 \\ &\left(p = 1, 2, \ldots, \frac{N}{2} \right). \end{aligned} \tag{68}$$

On résoud ce système par les méthodes classiques.

a. Expression du déterminant des inconnues. — On recherche d'abord la valeur du déterminant des inconnues. Elle est :

$$\begin{aligned} d = {} & \sin \Phi_0 \left(1 + \frac{Y_0}{Y_{\frac{N}{2}}} \right) 2^{\frac{N}{2}-1} \\ & \times Y_0 \left(Y_1 Y_2 \ldots Y_{\frac{N-2}{4}} \right)^2 \left(F_1 F_2 \ldots F_{\frac{N}{2}-1} F_{\frac{N}{2}} \right) \delta_1^2 M_{11}, \end{aligned} \tag{102}$$

expression dans laquelle δ_1 est donné par (76) et (76 *bis*), M_{11} désignant toujours le premier mineur par rapport à la première ligne de ce déterminant.

En utilisant Δ donné par (71), on peut encore écrire d sous la forme :

$$d = \frac{1}{4} \sin \Phi_0 \frac{Z_0 + Z_{\frac{N}{2}}}{F_0} \Delta \frac{M_{11}}{\delta_1}. \tag{103}$$

b. Calcul de P_k. — On voit facilement que

$$P_0 = P_1 = P_2 = \ldots = P_k = \ldots = P_{\frac{N-2}{4}} = 0. \tag{104}$$

c. Calcul de Q_k — Q_k est égal au quotient par d de la quantité dQ_k :

$$\begin{aligned} dQ_k = {} & \left(F_0 F_1 \ldots F_{\frac{N}{2}} \right)^* \left(Y_0 Y_1 \ldots Y_{\frac{N-2}{4}} \right)^{2*} \\ & \times Y_k \sin \frac{\Phi_0}{2} \cos \frac{\Phi_0}{2} \left(1 + \frac{Y_k}{Y_{\frac{N}{2}-k}} \right) 2^{\frac{N}{2}} \delta_1^2 M_{1,k+1}. \end{aligned} \tag{105}$$

Dans cette expression, l'astérique signifie que le facteur d'indice k ne figure pas dans le produit correspondant.

Il vient :

$$Q_k = \frac{Z_k + Z_{\frac{N}{2}-k}}{Z_0 + Z_{\frac{N}{2}}} \frac{M_{1,k+1}}{M_{11}} \frac{F_0}{F_k}. \tag{106}$$

d. Calcul de R_k. — R_k est égal au quotient par d de la quantité dR_k :

$$\begin{aligned} dR_k = {} & -\left(F_0 F_1 \ldots F_{\frac{N}{2}} \right) \left(Y_0 Y_1 \ldots Y_{\frac{N-2}{4}} \right)^{*2} \\ & \times Y_k 2^{\frac{N}{2}} \delta_1^2 M_{1,k+1}, \end{aligned} \tag{107}$$

d'où pour R_k

$$R_k = -\frac{2 F_0}{\sin \Phi_0} \frac{Z_k}{Z_0 + Z_{\frac{N}{2}}} \frac{M_{1,k+1}}{M_{11}}, \tag{108}$$

e. Calcul de S_k. — S_k est égal au quotient par d de la quantité dS_k :

$$\begin{aligned} dS_k = {} & -\left(F_0 F_1 \ldots F_{\frac{N}{2}} \right) \left(Y_0 Y_1 \ldots Y_{\frac{N-2}{4}} \right)^{*2} \\ & \times Y_k 2^{\frac{N}{2}} \delta_1^2 M_{1,k+1}, \end{aligned} \tag{109}$$

d'où

$$S_k = -\frac{2}{\sin \Phi_0} \frac{Z_k}{Z_0 + Z_{\frac{N}{2}}} \frac{M_{1,k+1}}{M_{1,1}} \frac{F_0}{F_{\frac{N}{2}-k}}. \tag{110}$$

Les expressions (104), (106), (108) et (110) permettent donc le calcul complet du système des tensions et des intensités qui se développent pour une fréquence de résonance quelconque correspondant à une oscillation du premier type.

B. CAS $\frac{N-2}{4}$ IMPAIR. — Les expressions que l'on obtient dans ce cas pour P_k, Q_k, R_k, S_k sont tout à fait analogues du point de vue formel aux précédentes, les quantités M' devant être calculées à partir de δ'_1, équation (81). On obtient donc :

$$P_k = 0, \tag{111}$$

$$Q_k = \frac{Z_k + Z_{\frac{N}{2}-k}}{Z_0 + Z_{\frac{N}{2}}} \frac{M'_{1,k+1}}{M'_{11}} \frac{F_0}{F_k}, \tag{112}$$

$$(113)\qquad R_k = \frac{-2F_0}{\sin\Phi_0}\,\frac{Z_k}{Z_0 + Z_{\frac{N}{2}}}\,\frac{M'_{1,k-1}}{M'_{11}}.$$

$$(114)\qquad S_k = \frac{-2}{\sin\Phi_0}\,\frac{Z_k}{Z_0 + Z_{\frac{N}{2}}}\,\frac{M'_{1,k-1}}{M'_{11}}\,\frac{F_{\frac{N}{2}-k}}{F'_0}.$$

2.4.2 Étude du cas $\frac{N}{2}$ pair.

A. $\frac{N}{4}$ IMPAIR. — Le système d'équations (85), (86) et (87) est compatible puisque la condition (93) est remplie. Nous supprimerons donc l'équation (87) qui est la plus compliquée et nous poserons $Q_0 = 1$.

Le système permettant le calcul des amplitudes sera alors :

$$(85)\qquad \sum_{k=0}^{\frac{N}{4}-1} P_k \cos p\psi_k + P_{\frac{N}{4}}(1+\cos p\pi)\cos p\psi_{\frac{N}{4}}$$
$$- \sum_{k=0}^{\frac{N}{4}-1}\left(\cos^2\frac{\Phi_0}{2} - \frac{Y_k}{Y_{\frac{N}{2}-k}}\sin^2\frac{\Phi_0}{2}\right) Q_k \cos p(\pi-\psi_k)$$
$$- \sin\frac{\Phi_0}{2}\cos\frac{\Phi_0}{2}\sum_{k=0}^{\frac{N}{4}-1} R_k\left(1 + \frac{Y_k}{Y_{\frac{N}{2}-k}}\right)\cos p(\pi-\psi_k) = 0,$$

$$(86)\qquad \sin\frac{\Phi_0}{2}\cos\frac{\Phi_0}{2}\sum_{k=0}^{\frac{N}{4}-1}\left(Y_k + Y_{\frac{N}{2}-k}\right) P_k \cos p(\pi-\psi_k)$$
$$+ P_{\frac{N}{4}}\,\frac{Y_{\frac{N}{4}}}{\sin\Phi_0}\left[\cos p\psi_{\frac{N}{4}} + \cos p\left(\pi - \psi_{\frac{N}{4}}\right)\right]$$
$$+ Q_{\frac{N}{4}} Y_{\frac{N}{4}}\operatorname{cotg}\Phi_0\left[\cos p\psi_{\frac{N}{4}} + \cos p\left(\pi - \psi_{\frac{N}{4}}\right)\right]$$
$$- \sum_{k=0}^{\frac{N}{4}-1} Y_k R_k \cos p\psi_k$$
$$+ \sum_{k=0}^{\frac{N}{4}-1}\left(Y_{\frac{N}{2}-k}\sin^2\frac{\Phi_0}{2} - Y_k\cos^2\frac{\Phi_0}{2}\right) S_k \cos p(\pi-\psi_k) = 0.$$

On résoud ce système par les méthodes classiques.

a. Expression du déterminant des inconnues. — On obtient :

$$(115)\qquad d = -\frac{\sin\Phi_0}{4}\,\frac{Z_0 + Z_{\frac{N}{2}}}{F_0}\,\frac{\Delta}{\delta_2}\,M^{(2)}_{11}.$$

Dans cette expression, Δ est donnée par l'expression (89), $M^{(2)}_{11}$ est le premier mineur relatif à la première ligne du déterminant δ_2.

δ_2 est donné par

$$(116)\qquad \delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & \dots & 1 & -1 \\ 1 & +1 & \cos\psi_2 & \cos\psi_2 & \dots & \cos\psi_{\frac{N}{4}-1} & \cos\psi_{\frac{N}{4}-1} \\ 1 & -1 & \cos 2\psi_2 & -\cos 2\psi_2 & \dots & \cos 2\psi_{\frac{N}{4}-1} & -\cos 2\psi_{\frac{N}{4}-1} \\ \dots & \dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots & \dots\dots \\ 1 & -1 & \cos\left(\frac{N}{4}-1\right)\psi_2 & -\cos\left(\frac{N}{4}-1\right)\psi_2 & \dots & \cos\left(\frac{N}{4}-1\right)\psi_{\frac{N}{4}-1} & -\cos\left(\frac{N}{4}-1\right)\psi_{\frac{N}{4}-1} \\ 1 & +1 & \cos\frac{N}{4}\psi_2 & \cos\frac{N}{4}\psi_2 & \dots & \cos\frac{N}{4}\psi_{\frac{N}{4}-1} & \cos\frac{N}{4}\psi_{\frac{N}{4}-1} \end{vmatrix}.$$

δ_2 donné par (116) et lié à δ_1, donné par (91) et (92), par l'équation

$$(117)\qquad \delta_2 = (-1)^{\frac{1}{2}\left(\frac{N}{4}+1\right)}\delta_1.$$

b. Calcul de P_k. — On a encore dans ce cas

$$(118)\qquad P_0 = P_1 = P_2 = \dots = P_k = \dots = P_{\frac{N}{4}} = 0.$$

c. Calcul de Q_k. — Nous distinguerons deux cas.

k pair, coefficient Q_{2k} : On obtient pour l'expression dQ_{2k} la quantité

$$(119)\qquad dQ_{2k} = -\frac{\sin\Phi_0}{4}\,\frac{Z_{2k} + Z_{\frac{N}{2}-2k}}{F_{2k}}\,\frac{\Delta}{\delta_2}\,M^{(2)}_{1,2k+1},$$

d'où

$$(120)\qquad Q_{2k} = \frac{Z_{2k} + Z_{\frac{N}{2}-2k}}{Z_0 + Z_{\frac{N}{2}}}\,\frac{F_0}{F_{2k}}\,\frac{M^{(2)}_{1,2k+1}}{M^{(2)}_{11}};$$

k impair, coefficient Q_{2k+1} : On obtient pour l'expression dQ_{2k+1} la quantité

$$(121)\qquad dQ_{2k+1} = -\frac{\sin\Phi_0}{4}\,\frac{Z_{2k+1} + Z_{\frac{N}{2}-2k-1}}{F_{2k+1}}\,\frac{\Delta}{\delta_3}\,M^{(3)}_{1,2k+2},$$

d'où

$$(122)\qquad Q_{2k+1} = -\frac{Z_{2k+1} + Z_{\frac{N}{2}-2k-1}}{Z_0 + Z_{\frac{N}{2}}}\,\frac{F_0}{F_{2k+1}}\,\frac{\delta_2}{\delta_3}\,\frac{M^{(3)}_{1,2k+2}}{M^{(2)}_{11}}.$$

Dans les équations (121) et (122) interviennent les quantités $M_{1,2k+2}^{(3)}$ et δ_3. Les $M_{1,2k+2}^{(3)}$ sont les mineurs d'ordre pair relatifs à la première ligne du déterminant δ_3 égal à

$$
(123)\quad \delta_3 = \begin{vmatrix}
1 & -1 & 1 & -1 & \dots & -1 & 1 \\
\cos\psi_1 & \cos\psi_1 & \cos\psi_3 & \cos\psi_3 & \dots & \cos\psi_{\frac{N}{4}-2} & 0 \\
\cos 2\psi_1 & -\cos 2\psi_1 & \cos 2\psi_1 & -\cos 2\psi_3 & \dots & -\cos\psi_{\frac{N}{4}-2} & \cos 2\psi_{\frac{N}{4}} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\cos\left(\frac{N}{4}-1\right)\psi_1 & -\cos\left(\frac{N}{4}-1\right)\psi_1 & \cos\left(\frac{N}{4}-1\right)\psi_3 & -\cos\left(\frac{N}{4}-1\right)\psi_3 & \dots & -\cos\left(\frac{N}{4}-1\right)\psi_{\frac{N}{4}-2} & \cos\left(\frac{N}{4}-1\right)\psi_{\frac{N}{4}}
\end{vmatrix}.
$$

Le déterminant δ_3 admet le développement :

$$
(124)\quad \delta_3 = (-1)^{\frac{1}{2}\left(\frac{N}{4}-1\right)} 2^{\frac{1}{2}\left(\frac{N}{4}-1\right)^2} \left(\cos\psi_1 \cos\psi_3 \dots \cos\psi_{\frac{N}{4}-2}\right)^3
$$

$$
\times \prod_{s=0}^{\frac{1}{2}\left(\frac{N}{4}-3\right)} \left(\cos^2\psi_{2k+1} - \cos^2\psi_{2s+1}\right)^2
$$

$$
\left(\frac{1}{2}\left(\frac{N}{2}-3\right) \geq k > s\right).
$$

d. Calcul de R_k. — Nous distinguerons deux cas :

k pair, coefficient R_{2k} : On trouve

$$
(125)\qquad R_{2k} = \frac{-2F_0}{\sin\Phi_0} \frac{Z_{2k}}{Z_0 + Z_{\frac{N}{2}}} \frac{M_{1,2k+1}^{(2)}}{M_{11}^{(2)}};
$$

k impair, coefficient R_{2k+1}. On trouve :

$$
(126)\qquad R_{2k+1} = \frac{-2F_0}{\sin\Phi_0} \frac{Z_{2k+1}}{Z_0 + Z_{\frac{N}{2}}} \frac{\delta_2}{\delta_3} \frac{M_{1,2k+2}^{(3)}}{M_{11}^{(2)}}.
$$

e. Calcul de S_k. — Nous distinguons deux cas :

k pair, coefficient S_{2k} : On trouve

$$
(127)\qquad S_{2k} = \frac{-2}{\sin\Phi_0} \frac{Z_{2k}}{Z_0 + Z_{\frac{N}{2}}} \frac{M_{1,2k+1}^{(2)}}{M_{11}^{(2)}} \frac{F_0}{F_{\frac{N}{2}-2k}};
$$

k impair, coefficient S_{2k+1} : On trouve

$$
(128)\qquad S_{2k+1} = \frac{-2}{\sin\Phi_0} \frac{Z_{2k+1}}{Z_0 + Z_{\frac{N}{2}}} \frac{F_0}{F_{\frac{N}{2}-2k-1}} \frac{\delta_2}{\delta_3} \frac{M_{1,2k+2}^{(3)}}{M_{11}^{(2)}}.
$$

B. $\frac{N}{4}$ PAIR. — Les équations de base sont toujours données par le système (85), (86).

a. Expression du déterminant des inconnues d'. — — Le déterminant d' a pour valeur

$$
(129)\qquad d' = \frac{\sin\Phi_0}{4} \frac{Z_0 + Z_{\frac{N}{2}}}{F_0} \frac{\Delta}{\delta'_2} M_{11}^{\prime(2)}.
$$

Dans cette expression $M_{11}^{\prime(2)}$ désignant les mineurs relatifs à la première ligne du déterminant δ'_2.

$$
(130)\quad \delta'_2 = \begin{vmatrix}
1 & -1 & 1 & -1 & \dots & 1 & -1 & 1 \\
1 & +1 & \cos\psi_2 & \cos\psi_2 & \dots & \cos\psi_{\frac{N}{4}-2} & \cos\psi_{\frac{N}{4}-2} & 0 \\
1 & -1 & \cos 2\psi_2 & -\cos 2\psi_2 & \dots & \cos 2\psi_{\frac{N}{4}-2} & \cos 2\psi_{\frac{N}{4}-2} & \cos 2\psi_{\frac{N}{4}} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
1 & +1 & \cos\left(\frac{N}{4}-1\right)\psi_2 & \cos\left(\frac{N}{4}-1\right)\psi_2 & \dots & \cos\left(\frac{N}{4}-1\right)\psi_{\frac{N}{4}-2} & \cos\left(\frac{N}{4}-1\right)\psi_{\frac{N}{4}-2} & 0 \\
1 & -1 & \cos\frac{N}{4}\psi_2 & -\cos\frac{N}{4}\psi_2 & \dots & \cos\frac{N}{4}\psi_{\frac{N}{4}-2} & -\cos\frac{N}{4}\psi_{\frac{N}{4}-2} & \cos\frac{N}{4}\psi_{\frac{N}{4}}
\end{vmatrix}.
$$

δ'_2 s'exprime en fonction de δ'_1, équation (96), par la relation :

$$
(131)\qquad \delta'_2 = (-1)^{\frac{N}{8}} \delta'_1.
$$

b. Calcul de P_k. — On a

$$
(132)\qquad P_0 = P_1 = P_2 = \dots = P_k = \dots P_{\frac{N}{4}} = 0.
$$

c. Calcul de Q_k. — Nous distinguerons deux cas :

k pair, coefficient Q_{2k} : On trouve

$$
(133)\qquad Q_{2k} = \frac{Z_{2k} + Z_{\frac{N}{2}-2k}}{Z_0 + Z_{\frac{N}{2}}} \frac{F_0}{F_{2k}} \frac{M_{1,2k+1}^{\prime(2)}}{M_{11}^{\prime(2)}};
$$

k impair, coefficient Q_{2k+1} : On trouve

$$
(134)\quad Q_{2k+1} = \frac{Z_{2k+1} + Z_{\frac{N}{2}-2k-1}}{Z_0 + Z_{\frac{N}{2}}} \frac{F_0}{F_{2k+1}} \frac{\delta'_2}{\delta'_3} \frac{M_{1,2k+2}^{\prime(3)}}{M_{11}^{\prime(2)}}.
$$

Dans cette dernière expression, δ'_3 a pour valeur :

$$(135)\qquad \delta'_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & \ldots & +1 & -1 \\ \cos\psi_1 & \cos\psi_1 & \ldots & \cos\psi_{\frac{N}{4}-1} & +\cos\psi_{\frac{N}{4}-1} \\ \cos 2\psi_1 & -\cos 2\psi_1 & \ldots & \cos 2\psi_{\frac{N}{4}-1} & -\cos 2\psi_{\frac{N}{4}-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \cos\left(\frac{N}{4}-2\right)\psi_1 & -\cos\left(\frac{N}{4}-2\right)\psi_1 & \ldots & \cos\left(\frac{N}{4}-2\right)\psi_{\frac{N}{4}-1} & -\cos\left(\frac{N}{4}-2\right)\psi_{\frac{N}{4}-1} \\ \cos\left(\frac{N}{4}-1\right)\psi_1 & +\cos\left(\frac{N}{4}-1\right)\psi_1 & \ldots & \cos\left(\frac{N}{4}-1\right)\psi_{\frac{N}{4}-1} & +\cos\left(\frac{N}{4}-1\right)\psi_{\frac{N}{4}-1} \end{vmatrix}.$$

On peut montrer que δ'_3 a pour expression

$$(136)\qquad \delta'_3 = 2^{\frac{N}{4}\left(\frac{N}{8}-1\right)+1} \left(\cos\psi_1 \cos\psi_3 \ldots \cos\psi_{\frac{N}{4}-1}\right) \times \prod_{s=0}^{\frac{1}{2}\left(\frac{N}{4}-1\right)} \left(\cos^2\psi_{2k+1} - \cos^2\psi_{2s+1}\right)^2$$

$$\left(\frac{1}{2}\left(\frac{N}{4}-2\right) \geq k > s\right).$$

Les quantités $M'^{(2)}_{1,2k+2}$ sont les mineurs d'ordre pair relatifs à la première ligne de ce déterminant.

d. Calcul de R_k. — k pair, coefficient R_{2k} : On trouve

$$(137)\qquad R_{2k} = -\frac{2F_0}{\sin\Phi_0}\,\frac{Z_{2k}}{Z_0 + Z_{\frac{N}{2}}}\,\frac{M'^{(2)}_{1,2k+1}}{M'^{(2)}_{11}};$$

k impair, coefficient R_{2k+1} : On trouve

$$(138)\qquad R_{2k+1} = -\frac{2F_0}{\sin\Phi_0}\,\frac{Z_{2k+1}}{Z_0 + Z_{\frac{N}{2}}}\,\frac{\delta'_2}{\delta'_3}\,\frac{M'^{(3)}_{1,2k+2}}{M'^{(2)}_{11}}.$$

e. Calcul de S_k. — k pair, coefficient S_{2k} : On trouve

$$(139)\qquad S_{2k} = -\frac{2}{\sin\Phi_0}\,\frac{Z_{2k}}{Z_0 + Z_{\frac{N}{2}}}\,\frac{F_0}{F_{\frac{N}{2}-2k}}\,\frac{M'^{(2)}_{1,2k+1}}{M'^{(2)}_{11}};$$

k impair, coefficient S_{2k+1} : On trouve

$$(140)\qquad S_{2k+1} = -\frac{2}{\sin\Phi_0}\,\frac{Z_{2k+1}}{Z_0 + Z_{\frac{N}{2}}}\,\frac{F_0}{F_{\frac{N}{2}-2k-1}}\,\frac{\delta'_2}{\delta'_3}\,\frac{M'^{(3)}_{1,2k+2}}{M'^{(2)}_{11}}.$$

CONCLUSION.

Les formules qui ont été développées au chapitre précédent permettent le calcul complet des coefficients **C, D, Γ, Δ** amplitudes des différents modes propres qui se développent dans la cavité anodique.

Les formules qui réalisent le passage des P, Q, R, S aux C, D, Γ, Δ sont les formules (66 *bis*) que nous récrirons ici pour mémoire sous la forme :

$$(141)\qquad \begin{cases} C_k = \dfrac{P_k + Q_k}{2}, \\ \Gamma_k = -\dfrac{P_k - Q_k}{2}, \\ D_k = \dfrac{R_k + S_k}{2}, \\ \Delta_k = -\dfrac{R_k - S_k}{2}. \end{cases}$$

On est ainsi en mesure de prévoir avec une bonne exactitude le glissement de fréquence d'une structure interdigitale à plafond en fonction de la charge (« pulling ») et l'on a mis en évidence les facteurs

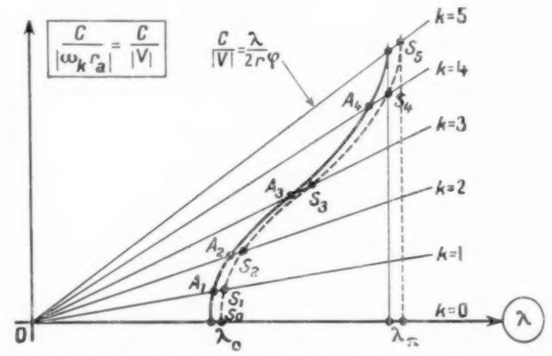


Fig. 9. — $r_a\varphi$ = pas linéaire sur le cercle d'interaction considéré; $\omega_k r$ = vitesse de phase sur le cercle d'interaction, de la composante K.

dont il dépend rendant ainsi possible sa modification par un changement des caractéristiques de la structure anodique conservant la fréquence de résonance du mode π. Les fréquences de résonance ont pour image sur le quadrant longueurs d'onde λ, taux de retard $\left|\frac{c}{v}\right|$ les points figurés sur la figure 9. Les

points S sont les résonances des oscillations symétriques, les points A celles des oscillations antisymétriques.

Simultanément on pourra etudier l'influence des composantes de champ parasites dont la présence est liée à une désadaptation du circuit de charge, par le calcul des coefficients C, D, Γ, Δ.

Supposons, par exemple, que $\frac{N}{2}$ soit impair et $\frac{N-2}{4}$ pair, le tube fonctionnant sur le mode π, ce qui est couramment réalisé.

Les formules de départ sont écrites en (104), (106), (108) et (110). On tire de celles-ci la valeur de la différence de potentiel de répartition π, entre deux sections situées dans le plan médian du tube. Il vient tous calculs faits :

$$V_0^p - V_0^{p+1} = \frac{F_0}{F_{\frac{N}{2}}} \cos p\pi; \tag{142}$$

$F_{\frac{N}{2}}$ n'est pas nul puisque la fréquence du mode π a subi un petit glissement dû à la partie réactive de la charge, jA. La répartition d'indice k introduira entre ces deux sections une différence de potentiel égale à

$$\begin{aligned} V_k^p - V_k^{p+1} = {} & \left(\frac{Z_k + Z_{\frac{N}{2}-k}}{Z_0 + Z_{\frac{N}{2}}}\right) \frac{M_{1,k+1}}{M_{11}} \frac{F_0}{F_k} \sin\frac{\psi_k}{2} \sin\left(p + \frac{1}{2}\right)\psi_k \\ & + \left(\frac{Z_k + Z_{\frac{N}{2}-k}}{Z_0 + Z_{\frac{N}{2}}}\right) \frac{M_{1,k+1}}{M_{11}} \frac{F_0}{F_{\frac{N}{2}-k}} \\ & \times \cos\frac{\psi_k}{2} \cos\left[p\,\overline{\pi - \psi_k} - \frac{\psi_k}{2}\right]. \end{aligned} \tag{143}$$

On voit que le quotient des amplitudes de la composante d'ordre $\left(\frac{N}{2} - k\right)$ à la composante d'ordre $\frac{N}{2}$ (répartition π) a pour expression :

$$\frac{\text{Composante}\left(\frac{N}{2} - k\right)}{\text{Composante}\left(\frac{N}{2}\right)} = \frac{F_{\frac{N}{2}}}{F_{\frac{N}{2}-k}} \cos\frac{\psi_k}{2} \frac{M_{1,k+1}}{M_{11}} \frac{Z_k + Z_{\frac{N}{2}-k}}{Z_0 + Z_{\frac{N}{2}}}. \tag{144}$$

L'étude de cette quantité pour chaque cas particulier permet la réalisation de structures anodiques que l'on peut dire à perturbations minima et qui sont celles qui devront être réalisées dans la pratique. Une telle étude peut avoir lieu pour chaque composante. Néanmoins celle qui est prépondérante est en général la composante immédiatement voisine obtenue en faisant $k = 1$ dans l'équation (144).

On dispose ainsi de toutes les relations nécessaires à la détermination des anodes de magnétron interdigitaux permettant de travailler dans les conditions les plus satisfaisantes en ce qui concerne les distorsions du champ électromagnétique d'une part et l'obtention d'un glissement de fréquence minimum en fonction de la charge d'autre part.

On remarquera, comme nous l'indiquions au début de cette étude, que les structures interdigitales permettent, au moyen de développement relativement limités, une étude électromagnétique beaucoup plus rigoureuse et plus approfondie que les structures classiques à cavités. Enfin la méthode employée au cours de cette étude est appliquable à la détermination des distorsions du champ électromagnétique d'un magnétron dont l'anode est constitué par une ligne à barreau d'un type quelconque.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] A. Leblond, *Étude d'une ligne interdigitale utilisée comme circuit anodique de magnétron oscillateur pour U.H.F.* (*Ann. Radioélectr.*, t. 8, 1953, p. 194-210).

[2] P. Guénard, O. Dœhler et R. Warnecke, *Sur les propriétés des lignes à structure périodique* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 235, 1952, p. 32-34).

[3] A. Leblond et G. Mourier, *Étude des lignes à barreaux à structure périodique pour tubes électroniques U.H.F.* (1re partie) (*Ann. Radioélectr.* t. 9, 1954, n° 36, p. 180-192).

[4] A. Leblond et G. Mourier, *Étude des lignes à barreaux à structure périodique pour tubes électroniques U.H.F.* (2e partie). (*Ann. Radioélectr.*, t. 9, 1954, n° 38, p. 311-326).

ÉTUDE DE LA DIFFRACTION DES ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES PAR UN RÉSEAU DE PLAQUES PERCÉES DE TROUS

PAR G. BROUSSAUD,

Département « Recherches Générales » du Centre de Recherches Techniques
de la Compagnie Générale de T. S. F.

SOMMAIRE. — *Un diélectrique artificiel de structure simple est étudié en vue de son application à la réalisation de lentilles pour hyperfréquences. Ce diélectrique est constitué par un empilement de plaques métalliques percées de trous suivant un quadrillage régulier. L'étude de ce milieu est abordée à partir de considérations sur la forme et la symétrie des champs dans les ouvertures.*

On déduit de là une représentation commode des phénomènes au moyen d'un ensemble de propagations guidées. Dans le cas de l'incidence oblique, le couplage introduit entre les divers guides fournit une image concrète du processus de la réfraction.

Un calcul relativement simple permet, à partir de paramètres aisément mesurables, une analyse précise du comportement du réseau jusqu'à des incidences supérieures à 30°.

Dans le cas d'une onde dont la polarisation est parallèle au plan d'incidence, il peut arriver que l'énergie soit entièrement absorbée par des modes se propageant entre les plaques. La valeur de cet angle critique est une fonction simple de l'entraxe des trous.

L'ensemble de ces résultats permet le calcul d'une lentille satisfaisant à un sévère cahier des charges. (C. D. U. : 621.396.677.8.)

SUMMARY. — *An artificial dielectric of simple structure is examined with a view to its application to microwave lenses. This dielectric consists of a stack of metal plates perforated with holes arranged in a square pattern.*

The study of this medium begins with considerations of the shape and symmetry of the fields in the apertures.

From this is deduced a convenient representation of the phenomena by means of a system of guided propagations. In the case of oblique incidence, coupling introduced between the various guides provides a concrete picture of the refraction process.

A relatively simple calculation provides, from parameters which are easily measured, a precise analysis of the behaviour of the network up to incidences greater than 30°.

In the case of a wave of which the polarisation is parallel to the plane of incidence, it may happen that the energy is entirely absorbed by modes propagating between the plates. The value of this critical angle is a simple function of the pitch of the holes.

The sum total of these results allows calculation of a lens meeting very critical specifications. (U. D. C. : 621.396.677.8.)

INTRODUCTION.

Cet article fait le point des résultats obtenus dans l'étude du diélectrique artificiel développé à la Compagnie Générale de T.S.F. en vue de la réalisation de lentilles électromagnétiques pour ondes ultra-courtes.

Parmi les nombreux réseaux proposés à cet effet, celui-ci possède de grands avantages technologiques. Il se présente comme un empilement de plaques métalliques percées de trous circulaires dont le diamètre est inférieur à la longueur d'onde et dont les centres forment les sommets d'un quadrillage régulier.

Cette structure est complémentaire de celle proposée par W. E. Kock [1]; l'indice équivalent est alors inférieur à l'unité, mais la construction du réseau ne soulève plus aucune difficulté.

L'étude de base de ce système a été publiée dans la

Thèse de J. C. Simon [2] qui a montré qu'il était possible de ramener le problème de la diffraction d'un réseau éclairé en incidence normale, à celui, plus simple, d'une propagation d'ondes guidées.

Nous nous proposons ici d'étudier les principales caractéristiques électromagnétiques du réseau tel que nous l'avons défini plus haut. Le succès remporté dans ce domaine par l'assimilation à une propagation guidée nous a conduit à reconsidérer les éléments de base de ce problème pour voir s'il est possible d'étendre cette intéressante notion au cas général de l'incidence oblique.

1. ÉTUDE GÉNÉRALE DES RÉSEAUX.

Nous considérerons ici des réseaux homogènes, c'est-à-dire constitués par des plaques infiniment grandes, régulièrement espacées et percées de trous égaux, suivant un quadrillage régulier. Nous supposerons aussi ces réseaux éclairés par des ondes planes.

Abordons le problème en étudiant le champ diffracté par une seule plaque. Ce champ est défini de façon unique à partir des composantes tangentielles du champ électrique dans les ouvertures (cette composante est nulle sur l'écran). Aussi est-ce à l'analyse de ce champ que nous allons tout d'abord nous attacher.

La solution rigoureuse de ce problème soulève des difficultés considérables. Un raisonnement simple, basé sur la continuité des champs, la nécessité de satisfaire aux conditions aux limites et la symétrie des ouvertures permet cependant d'aboutir à des résultats simplifiant beaucoup les données du problème.

1.1. Répartition des champs dans les ouvertures.

On sait que sur un disque parfaitement conducteur, le champ électrique est normal au plan du disque, et le champ magnétique tangentiel. Par application du théorème de Babinet, on en déduit que, dans l'ouverture, le champ électrique est tangentiel et le champ magnétique normal.

Il s'agit là de champs totaux, c'est-à-dire de la somme des champs en l'absence d'ouverture (champ sur l'écran métallique plan et indéfini) et du champ dit « de perturbation » introduit justement de façon que le champ total satisfasse aux conditions aux limites en présence de l'ouverture.

En incidence normale, les vecteurs électrique et magnétique de l'onde incidente sont parallèles au plan de l'écran. En l'absence d'ouverture, le vecteur électrique est donc nul et le vecteur magnétique inchangé, en tout point de ce plan.

Le champ électrique de perturbation introduit en présence de l'ouverture possédera donc la propriété du champ électrique total : il sera situé dans le plan de l'écran.

La répartition des champs sur les bords de l'ouverture (supposée infiniment mince) peut présenter quelques difficultés; J. C. Simon [2] a montré qu'il n'y avait aucune impossibilité physique à concevoir un champ électrique situé dans le plan de l'ouverture, infini et normal au contour. Une telle répartition est à rapprocher de celle d'un mode TE dans un guide d'ondes.

En incidence oblique la répartition sur l'écran indéfini devient plus compliquée. Dans le cas général la composante normale du champ électrique ne sera pas nulle. En présence d'ouverture il faudra donc attribuer au champ électrique de perturbation dans cette ouverture une composante normale de nature à la compenser.

Le cas général se divise en deux suivant que le vecteur électrique de l'onde incidente se trouve dans le plan d'incidence (nous noterons $E_{\parallel}$) ou lui est perpendiculaire ($E_{\perp}$).

Dans le premier cas (*fig.* 1), le champ électrique de perturbation dans l'ouverture possédera une composante normale

$$E_z = E_{\parallel} \sin\psi \, e^{ikx\cos\psi}.$$

Dans le cas d'incidences pas trop élevées et d'ouvertures petites devant la longueur d'onde, on pourra négliger le facteur de phase.

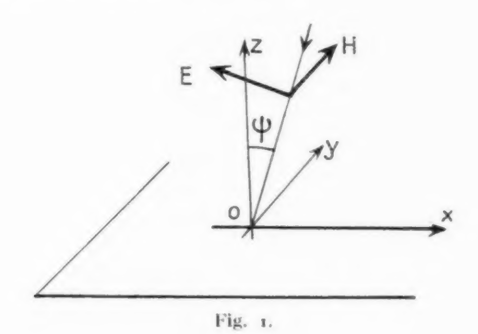


Fig. 1.

Nous pouvons considérer que nous avons ajouté à la répartition en incidence normale un champ analogue à celui d'un mode TM dans un guide d'onde.

Dans le second cas (*fig.* 2), le raisonnement sur le vecteur électrique sera le même que dans le cas de

l'incidence normale et la répartition du champ dans l'ouverture, analogue.

Nous verrons que, dans les deux cas envisagés la propagation d'une onde plane à travers un réseau de plaques se fera sans changement de polarisation.

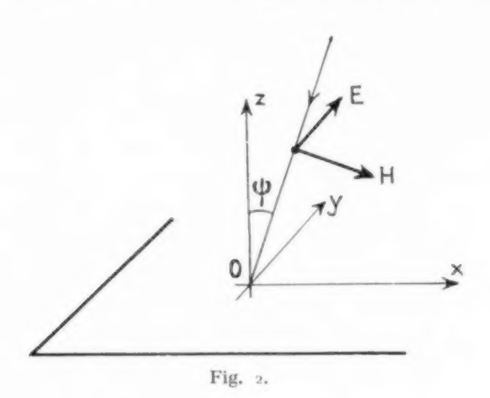


Fig. 2.

Le facteur de transmission pourra, par contre, être notablement différent suivant qu'il s'agit d'une onde $E_{\parallel}$ ou d'une onde $E_{\perp}$. Donc, dans le cas général, la polarisation de l'onde transmise sera différente de celle de l'onde incidente.

1.2. Cas de l'ouverture circulaire.

Les propriétés de symétrie du cercle permettent de préciser la répartition des champs dans l'ouverture.

Dans tous les cas, le plan diamétral parallèle au plan d'incidence est un plan de symétrie pour les lignes de force des champs. Si l'on fait tendre l'angle d'incidence vers zéro, on aboutit alors à deux plans de symétrie rectangulaires suivant qu'on est parti d'une onde $E_{\parallel}$ ou d'une onde $E_{\perp}$.

Si le diamètre du trou est petit devant la longueur d'onde, on aboutit intuitivement à la répartition des champs d'un mode TE_{11} dans un guide circulaire. En incidence oblique, et dans le cas d'une onde $E_{\parallel}$ il faut ajouter une répartition de champs analogue à celle d'un mode TM_{01} dans un guide circulaire. On conçoit enfin que l'importance de cette « contribution » de l'incidence oblique croisse, en première approximation, comme angle d'incidence.

Ces résultats sont en accord avec ceux obtenus par Stevenson [3] dans le cas du trou percé dans un écran plan et infiniment mince. Notons, cependant, que le raisonnement ci-dessus est valable dans le cas d'un réseau de trous.

Le calcul fait par Stevenson aboutit à une expression des champs sous forme de série du nombre d'onde $k\left(k = \frac{2\pi}{\lambda}\right)$.

Dans le cas d'une onde $E_{\parallel}$ le champ résultant apparaît bien comme la somme de deux champs; le premier est analogue à celui correspondant à l'incidence normale, le second proportionnel à $\sin\psi$ (ψ est l'angle d'incidence) et en phase avec le champ incident.

On a en effet, avec les notations de la figure,

$$(1)\quad \begin{cases} E_x = -\dfrac{4}{3\pi} ikr_0 \left[(2 - \sin^2\psi)\sqrt{1 - \dfrac{r^2}{r_0^2}} + (1 + \sin^2\psi)\dfrac{x^2}{r_0^2}\dfrac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{r^2}{r_0^2}}} \right] - \dfrac{2}{\pi}\sin\psi\,\dfrac{x}{r_0}\dfrac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{r^2}{r_0^2}}}, \\ E_y = -\dfrac{4}{3\pi} ikr_0 (1 + \sin^2\psi)\dfrac{xy}{r_0^2}\dfrac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{r^2}{r_0^2}}} - \dfrac{2}{\pi}\sin\psi\,\dfrac{y}{r_0}\dfrac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{r^2}{r_0^2}}}. \end{cases}$$

Nous désignerons ces champs par les numéros 1 et 2.

La figure 3 représente les lignes de force de ces

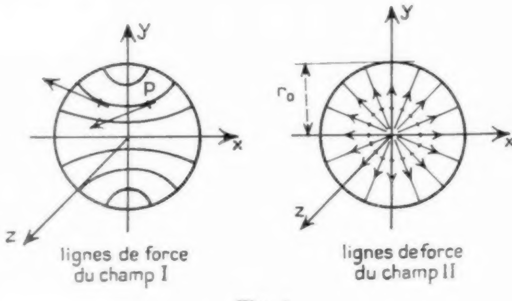


Fig. 3.

deux répartitions. Dans le cas d'une onde $E_{\perp}$ la répartition reste la même qu'en incidence normale

$$(2)\quad \begin{cases} E_x = \dfrac{4}{3\pi} ikr_0 \cos\psi\,\dfrac{xy}{r_0}\dfrac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{r^2}{r_0^2}}}, \\ E_y = \dfrac{4}{3\pi} ikr_0 \cos\psi \left[2\sqrt{1 - \dfrac{r^2}{r_0^2}} + \dfrac{y^2}{r_0^2}\dfrac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{r^2}{r_0^2}}} \right]. \end{cases}$$

On vérifie que tous ces champs deviennent infinis

comme l'inverse de la racine carrée de la distance à l'arrête (Meixner).

On peut s'assurer que la coïncidence entre les champs 1 et 2 et les modes TE_{11} et TM_{01} dans un guide circulaire est excellente au centre du trou. La différence ne devient sensible que sur les bords, là où l'hypothèse de l'écran infiniment mince conduit à des champs infinis.

1.3. **Propriété du champ diffracté.**

L'intérêt des considérations précédentes vient, d'une part des relations de symétrie des champs dans l'ouverture, d'autre part des analogies avec des modes d'ondes guidées. Le champ rayonné par une ouverture peut se déduire des champs dans cette ouverture par les formules de Kottler.

Dans le cas particulier de l'écran plan, infiniment mince et parfaitement conducteur, le champ rayonné en M s'écrit

$$(3)\quad \begin{cases} a.\quad \vec{E}_M = \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\iint_S \left(\vec{n}\times\vec{E}\right)\times\overrightarrow{\text{grad}}\,\Psi\,ds, \\ b.\quad \vec{H}_M = \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\iint \Big\{ ik\left(\vec{n}\times\vec{E}\right)\Psi \\ \qquad\qquad + \dfrac{i}{k}\,\text{div}\left(\vec{n}\times\vec{E}\right)\overrightarrow{\text{grad}}\,\Psi \Big\}\,ds, \end{cases}$$

avec $\Psi = \dfrac{e^{ikR}}{R}$; R étant la distance du point M à un point P de la surface S de l'ouverture; ds représente l'élément linéaire de surface et $\vec{n}$ la normale à cette surface.

Ces formules font intervenir seulement le champ électrique par le produit vectoriel $\vec{n}\times\vec{E}$, donc par la composante tangentielle de ce vecteur.

La formule donnant le champ électrique est particulièrement simple. Elle met en évidence le champ rayonné par un élément de surface ds. Si l'on utilise les considérations de symétrie développées plus haut, le calcul du champ diffracté se trouve notablement simplifié.

CHAMP RAYONNÉ PAR UNE SEULE OUVERTURE. — 1° *Champ rayonné dans l'axe.* — On décompose la surface de diffraction en éléments ds symétriques deux à deux par rapport aux axes de coordonnées (voir *fig.* 3). La formule (3 *a*) conduit alors à un calcul très simple [1].

Pour le champ 1, on trouve, au point M de l'axe Oz

$$(4)\qquad \vec{E}_M = 4\vec{x}\iint E_x\,\frac{\partial\Psi}{\partial z}\,ds.$$

Le champ rayonné dans l'axe est donc polarisé parallèlement au plan de l'écran, et dans le même sens que l'onde incidente.

Pour le champ 2,

$$(5)\qquad \vec{E}_M = -4\vec{z}\iint \vec{E}\,\frac{\vec{R}}{R^2}\,ds.$$

Le facteur de phase $\dfrac{e^{ikR}}{R}$ étant partout supposé, ce champ décroît comme $\dfrac{1}{R^2}$. Il ne rayonne donc pas dans cette direction.

2° *Champs rayonnés au loin.* — Les champs au loin obtenus par Stevenson complètent ces résultats. Le cas d'une onde $E_{\parallel}$ se traduit encore par la superposition de deux ondes *du même ordre* [2], la première correspondant au cas de l'incidence normale.

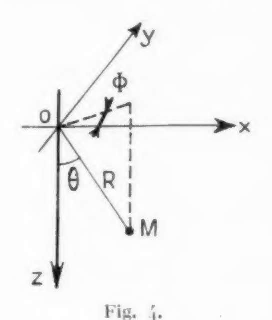


Fig. 4.

On a, avec les notations de la figure 4 :

— Champ 1 :

$$(6)\quad \begin{cases} E_{\theta_1} = \dfrac{2k^2 r_0^3 \cos\Phi}{3\pi} \\ \qquad \times \left\{ -2 + \dfrac{k^2 r_0^2}{15}(-16 + 5\sin^2\theta) \right\} \dfrac{e^{ikR}}{R}; \\ E_{\Phi_1} = \dfrac{2k^2 r_0^3 \sin\Phi\cos\theta}{3\pi} \\ \qquad \times \left\{ 2 - \dfrac{k^2 r_0^2}{15}(-16 + 5\sin^2\theta) \right\} \dfrac{e^{ikR}}{R}; \end{cases}$$

— Champ 2 :

$$(7)\quad \begin{cases} E_{\theta_2} = \dfrac{k^2 r_0^3 \sin\theta}{3\pi} \\ \qquad \times \left\{ 2 + \dfrac{k^2 r_0^2}{15}(3\cos^2\theta - 16\cos\Phi - 1) \right\} \dfrac{e^{ikR}}{R}\sin\psi, \\ E_{\Phi_2} = 0 + \dfrac{k^4 r_0^5}{45\pi}\left\{ \sin 2\theta \sin 2\Phi \right\} \dfrac{e^{ikR}}{R}\sin\psi. \end{cases}$$

[1] On calcule $\left(\vec{n}\times\vec{E}\right)\times\overrightarrow{\text{grad}}\,\Psi$ pour deux points P_1 et P_2 symétriques par rapport à Oy (*fig.* 3) si en P_1 les composantes de $\vec{E}$ et $\overrightarrow{\text{grad}}\,\Psi$ sont E_x, E_y, 0; X, Y, Z, en P_2 on aura pour leurs homologues E_x, $-E_y$, 0; $-X, Y, Z$.

[2] Rappelons que les solutions de Stevenson sont écrites sous forme de séries des puissances de K.

Les diagrammes de ces champs sont tracés sur la figure 5. On voit que le champ 1 rayonne principalement dans la direction de Oz, tandis que le champ 2 rayonne omnidirectionnellement dans le plan de l'écran.

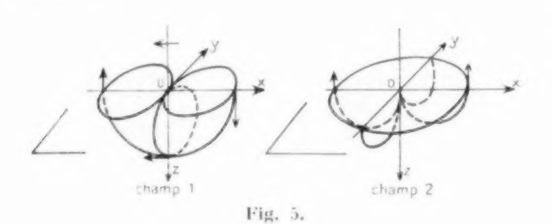


Fig. 5.

On remarque aussi que le champ 1 rayonne comme un doublet magnétique, tandis que le champ 2 rayonne comme un doublet électrique; l'axe du premier est perpendiculaire au plan d'incidence, l'axe du second coïncide avec l'axe du trou.

On peut donc remplacer un réseau de plaques par un réseau de tels doublets. Cette équivalence peut être à la base d'une théorie générale des réseaux.

Pour les ondes $E_{\perp}$, la solution de Stevenson se décompose aussi en deux champs : le premier, semblable à celui rayonné en incidence normale, le second proportionnel à $\sin 2\psi$, et pouvant donc être considéré comme la contribution de l'incidence oblique.

Les composantes sont :

$$(8)\quad \begin{cases} E_\Phi = k^2 r_0^3 \dfrac{\pi}{15(9\pi^2+64)}\, 3\sin 2\theta(1+2\cos 2\Phi)\sin 2\psi, \\ E_\theta = k^2 r_0^3 \dfrac{\pi}{15(9\pi^2+64)}\, 12\sin\theta\sin 2\Phi\sin 2\Psi. \end{cases}$$

Nous voyons que ce champ est du second ordre (en $k^2 r_0^3$) par rapport au champ principal. Nous le négligerons en première approximation.

Il ne faut pas s'étonner de trouver, comme direction privilégiée du champ diffracté, la normale au plan de l'écran. Dans le trou, petit devant la longueur d'onde, les composantes des champs dans l'ouverture sont partout en phase, et l'inclinaison de l'onde incidente ne se traduit pas autrement que par l'apparition d'un champ rayonné de révolution, semblable à celui d'un doublet électrique.

Les résultats sont d'autant plus rigoureux que l'ouverture est plus petite. Au contraire, dans le cas d'une ouverture grande devant la longueur d'onde, on sait que les champs sont sensiblement ceux existant dans l'espace libre, donc en phase entre eux et en phase avec l'onde incidente au point considéré. Le déphasage le long de l'ouverture sera fonction de l'inclinaison de l'onde incidente. Cette direction sera donc une direction privilégiée du rayonnement diffracté.

Entre ces deux cas extrêmes, le problème est particulièrement complexe.

Fort heureusement, dans tous les cas envisagés ici, le diamètre des ouvertures n'excède pas la demi-longueur d'onde et l'approximation de l'ouverture petite devant la longueur d'onde est toujours justifiée.

2. ÉTUDE D'UN RÉSEAU DE PLAQUES ÉCLAIRÉES EN INCIDENCE NORMALE.

2.1. Propriétés générales.

En incidence normale, les plans médiateurs des segments joignant les centres de deux cercles, jouissent d'une importante propriété [2].

Sur ceux perpendiculaires au champ électrique de l'onde incidente on a, avec les notations de la figure 6,

$$(9)\qquad E_x = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0.$$

Ces conditions sont celles que l'on rencontre sur un conducteur parfait. Ces plans peuvent donc être métallisés.

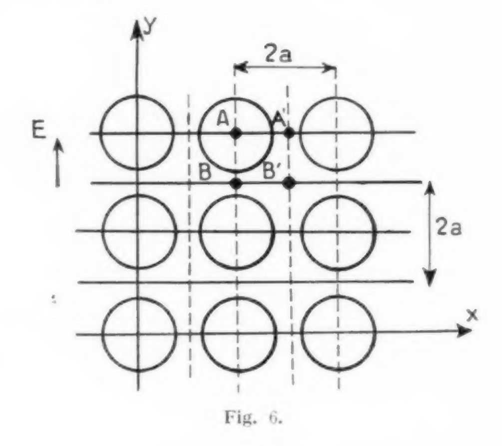


Fig. 6.

Sur ceux parallèles au champ électrique de l'onde incidente on a, au contraire,

$$(10)\qquad E_y = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0.$$

Ces conditions, complémentaires des précédentes, définissent ce qu'il est convenu d'appeler un plan d'impédance infinie. Ainsi, la diffraction d'une plaque percée de trous suivant un quadrillage régulier se ramène à la propagation d'ondes guidées.

Le guide fictif ainsi défini possède deux parois métalliques (AA′ et BB′ avec les notations de la figure 6) et deux parois d'impédance infinie (AB et A′B′). L'écran apparaît comme un obstacle dans ce guide.

Le problème du réseau éclairé en incidence normale n'est autre que celui des ondes se propageant dans le guide fictif qui vient d'être défini, les diverses plaques se comportant alors comme autant d'obstacles minces introduits dans ce guide. Si la distance entre les plans d'impédance infinie est inférieure à $\frac{\lambda}{2}$, le seul mode qui peut se propager est le mode TEM, c'est-à-dire l'onde plane. *Nous nous placerons toujours dans ce cas.*

Pour définir un obstacle dans un guide d'onde, nous utiliserons, de préférence à la notion d'impédance, celle basée sur les coefficients de transmission et de réflexion [4]. Cette notation étant semble-t-il peu répandue, nous la rappellerons ici brièvement.

Soit, sur une ligne de transmission fermée sur son impédance caractéristique, un obstacle non absorbant (*fig.* 7).

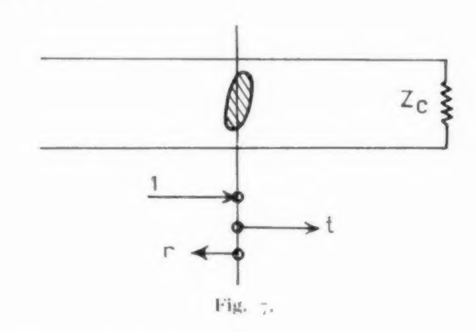


Fig. 7.

Pour un mode donné, il est toujours possible de trouver un plan, appelé plan de symétrie électromagnétique, où les coefficients de transmission et de réflexion peuvent s'écrire

(11) $$\begin{cases} t = i \sin u \, e^{i\varphi}, \\ r = \cos u \, e^{i\varphi}. \end{cases}$$

Nous appellerons u le paramètre caractéristique de l'obstacle et φ le facteur de phase.

Dans le cas où l'obstacle est mince, on a de plus

$$\varphi = \pi + u.$$

Un seul paramètre suffit à le représenter.

Si u est positif, l'obstacle est équivalent à une capacitance; si u est négatif, il est équivalent à une inductance.

Nous verrons que les plaques de nos réseaux sont caractérisées par des u négatifs. Aussi nous attacherons-nous plus spécialement à ce cas dans la discussion du calcul qui va suivre.

Considérons alors une suite de n obstacles identiques répartis le long d'une ligne de transmission.

Dans le cas général, le calcul n'est abordable que si tous les obstacles sont également espacés (*fig.* 8), c'est le cas d'un réseau homogène tel qu'il a été défini plus haut. Soit $\theta = \frac{2\pi l}{\lambda}$ l'angle électrique entre deux obstacles consécutifs. Désignons par a

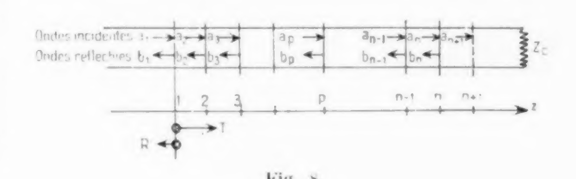


Fig. 8.

les ondes se dirigeant dans le sens positif, par b les ondes se dirigeant en sens inverse; a_p et b_p sont comptés sur l'obstacle de même indice.

On peut écrire, au niveau de chaque obstacle :

(12) $$\begin{cases} a_p = e^{-i\theta} t \, a_{p-1} + e^{-2i\theta} r \, b_p, \\ b_p = e^{-i\theta} t \, b_{p+1} + r \, a_p. \end{cases}$$

Rapporté au plan du premier obstacle, le coefficient de transmission T s'écrit

$$T = \frac{a_{n+1}}{a_1} e^{in\theta}.$$

soit

(13) $$T = |T| \, e^{i\Phi} = |T| \, e^{i(n\theta + \Phi')}$$

On trouve

(14) $$|T|^2 = \frac{1}{1 + \cot g^2 u \, P_{n-1}^2(x)}$$

et

(15) $$\operatorname{tg}\Phi' = \frac{\cos(\theta - \varphi)}{\sin u} \, \frac{P_{n-1}(x)}{\frac{x}{2} P_{n-1}(x) - P_{n-2}(x)}.$$

avec

(16) $$x = \frac{2 \sin(\theta - \varphi)}{\sin u}.$$

$P_n(x)$ est le polynome électrosphérique [5] d'ordre n, défini par la relation de récurence

(17) $$P_{n-1}(x) + P_{n+1}(x) = x P_n(x),$$

avec

$$P_0(x) = 1 \quad \text{et} \quad P_1(x) = x.$$

Dans ce qui suit, la variable sera l'angle électrique θ qui représente à la fois l'écartement entre deux plaques et le fréquence de l'onde considérée.

2.2. Étude du module de la transmission.

La formule (14) se simplifie en écrivant $P_n(x)$ au moyen de fonctions trigonométriques. Il faut alors distinguer deux cas :

1° Si $|x| < 2$. — On pose $x = 2\cos\psi$ et l'on a alors

$$P_{n-1}(x) = \frac{\sin n\psi}{\sin\psi}. \tag{18}$$

2° Si $|x| > 2$, on pose $x = 2\,\mathrm{ch}\,\psi$ et l'on a

$$P_{n-1}(x) = \frac{\mathrm{sh}\, n\psi}{\mathrm{sh}\,\psi}. \tag{19}$$

La discussion des formules précédentes conduit aux résultats suivants :

Le réseau constitue un filtre passe bande; la bande passante correspond à $|x| < 2$, c'est-à-dire à

$$\varphi - |u| \le \theta \le \varphi + |u|. \tag{20}$$

Il y a, dans cet intervalle, $n - 1$ maxima.

En ces points, la transmission du réseau est égale à 1.

Au centre de la bande ($\theta = \varphi$), il y a un maximum si n est pair, un minimum si n est impair.

Hors de cette bande, c'est-à-dire pour $|x| > 2$, la transmission décroît de façon exponentielle.

La courbe de transmission a alors l'allure de celle tracée sur la figure 9 dans le cas d'un réseau de cinq plaques.

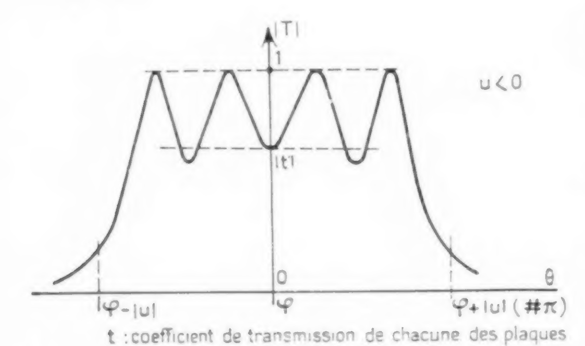


Fig. 9.

2.3. Étude de la phase de la transmission.

Cette étude ne présente d'intérêt que dans la bande transmise.

On a, en posant $x = 2\cos\varphi$,

$$\mathrm{tg}\,\Phi' = \frac{\mathrm{tg}\, n\psi}{\sin\psi}\,\frac{\cos(\theta - \varphi)}{\sin u}. \tag{21}$$

Rappelons que la phase de l'onde transmise s'écrit

$$\Phi = \Phi' + n\theta.$$

Si le terme Φ' est toujours fonction décroissante de θ, il peut n'en être pas de même de la somme $\Phi' + n\theta$. Le calcul montre en effet que la courbe de phase passe par un maximum qui apparaît dans la bande passante seulement si $|u| > u_0$, avec

$$\cos u_0 = u_0 = 0{,}74 \text{ radian}. \tag{22}$$

On montre, en outre, que la courbe $\Phi = f(\theta)$ présente des points d'inflexion aux points correspondant aux minima du module de la transmission.

La phase a alors, suivant le cas, l'allure indiquée sur les figures 10 *a* et 10 *b*.

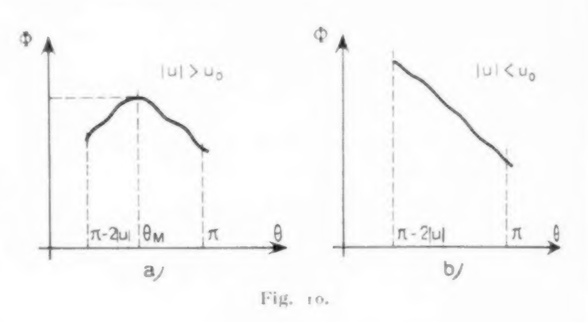


Fig. 10.

L'expression de la phase donnée par la formule (21), se prête mal au calcul numérique.

Si le réseau est utilisé au voisinage du centre de sa bande passante ($\theta - \varphi$ petit) et si $\theta > \theta_M$, on peut écrire

$$\boxed{\Phi = n\left[\frac{\theta - \varphi}{\sin u} - \frac{\pi}{2} + \theta\right]}. \tag{23}$$

2.4. Mesure des paramètres u et φ.

La transmission d'un réseau de deux plaques est celle d'un système résonnant [6]. Si l'on trace la courbe représentant l'énergie transmise en fonction de l'écartement des deux plaques, on constate que pour une certaine valeur θ_0, la transmission du réseau passe par un maximum égal à 1.

On en déduit φ à partir de l'équation

$$\theta_0 - \varphi = 0. \tag{24}$$

Si la plaque peut être considérée comme infiniment mince, on tire u de la relation

$$\varphi = \pi + u.$$

Dans le cas contraire, il faut déduire u de la trans-

mission mesurée sur un des flancs de la courbe, par exemple à partir de l'équation

$$(25)\qquad T^2 = \frac{1}{1+\left[\dfrac{\cos u}{\sin^2 u}\sin(\theta-\theta_0)\right]^2}.$$

2.5. Dispositif expérimental de mesure.

Le paquet de plaques à étudier est inséré dans un rayonnement réalisant le mieux possible les conditions de l'onde plane.

Pour cela, on dispose en A un miroir parabolique excité par un cornet placé en son foyer. On obtient ainsi un faisceau parallèle. L'expérience montre qu'à la distance où l'on dispose les plaques, le champ est constant en amplitude et en phase dans une région sensiblement égale à la moitié de la surface du miroir.

En B on dispose un miroir et un cornet identique qui recueille le rayonnement transmis (*fig.* 11).

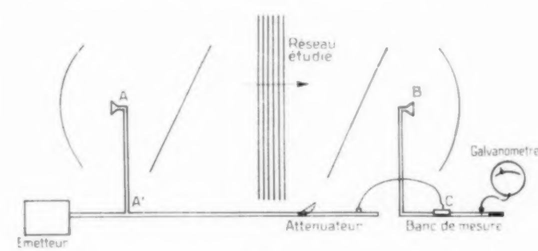


Fig. 11.

Les dimensions du faisceau doivent être suffisamment grandes pour que les phénomènes secondaires ne troublent pas la mesure que l'on cherche à effectuer. Une série de tâtonnements a permis de mettre au point un dispositif qui donne toute satisfaction.

La longueur d'onde choisie étant 3,42 cm, les miroirs ont un diamètre de 50 cm; ils sont distants de 3,5 m. Les plaques ont pour dimensions 60 × 75 cm. On peut ainsi éviter les effets de bord et dans l'étude des phénomènes en incidence oblique les incliner jusqu'à un angle de 45° sans inconvénient.

Mesure de la phase. — Pour mesurer le déphasage apporté par le réseau, on prélève en A′ une faible portion de l'énergie. Transportée en C à l'aide d'un guide d'onde, on la compare avec l'énergie recueillie en B après le passage à travers les plaques. Si les amplitudes de ces deux ondes sont voisines, et si leurs phases diffèrent de π, on obtient un zéro sur le galvanomètre mesurant le courant détecté. Toute variation de phase s'apprécie en déplaçant le chariot sur le banc de mesure. On obtient ainsi une grande précision sur la mesure de la phase.

Mesure du module. — Elle s'effectue simplement en comparant l'énergie reçue avec et sans plaques. Cette mesure est évidemment moins précise que la mesure de phase.

Précautions à prendre. — *a.* Il est nécessaire, pour avoir des résultats cohérents que le paquet de plaques soit découplé des paraboles d'émission et de réception.

Pour cela, on dispose, ainsi que l'indique la figure, deux panneaux d'isorel recouverts d'aquadag et inclinés à 45° sur la direction de propagation.

Avant d'intercaler ces atténuateurs, les valeurs du champ reçu en B oscillaient suivant la position des plaques entre deux valeurs dans le rapport 1,5. Après la mise en place des panneaux, ce rapport tombe à 1,05.

b. Étant donné ces différents découplages, il a été nécessaire d'utiliser un klystron du modèle KR331 construit par la Compagnie générale de T.S.F., fournissant une puissance utile de 200 mW.

Les mesures étaient effectuées à l'aide d'un détecteur accordé à cristal au silicium et d'un galvanomètre AOIP sur la sensibilité 45 mV.

Résultats expérimentaux. — La mesure des paramètres u et φ a montré que les plaques dont l'épaisseur est inférieure à 0,02 λ pouvaient être considérées comme minces.

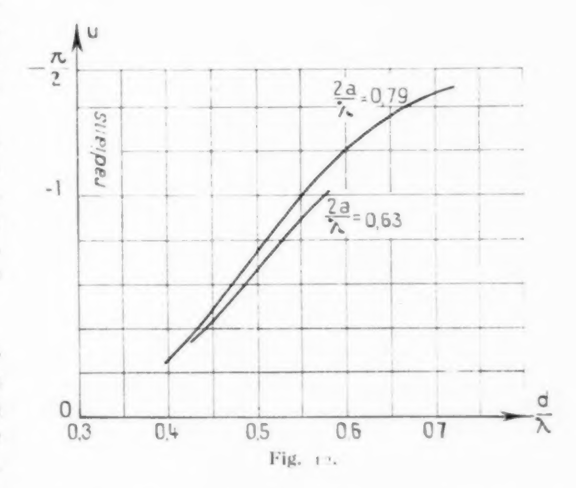


Fig. 12.

Les courbes tracées sur la figure 12 donnent pour deux types de quadrillages les valeurs du paramètre u en fonction du diamètre des trous.

A partir de ces données, le calcul de l'amplitude et de la phase de la transmission des réseaux fournit des résultats en parfait accord avec les relevés expérimentaux. Par suite des sinuosités de la courbe de transmission (voir *fig.* 9), le tracé expérimental précis de cette courbe nécessiterait un très grand nombre de points, d'autant plus que le nombre des plaques est plus grand. On constate néanmoins

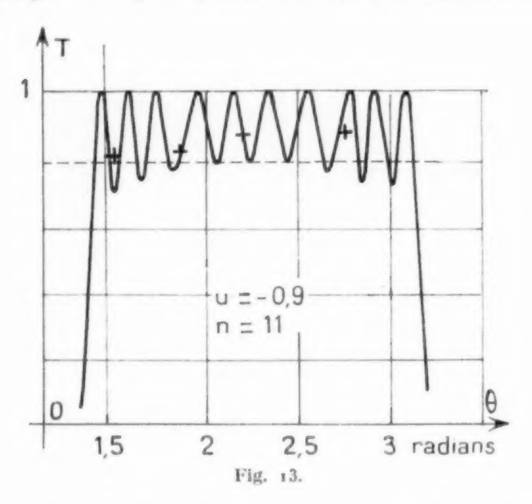


Fig. 13.

que les résultats des mesures sont toujours très voisins des courbes tracées à partir de la formule (14); un exemple est donné figure 13.

Enfin la figure 14 montre que la valeur de la phase

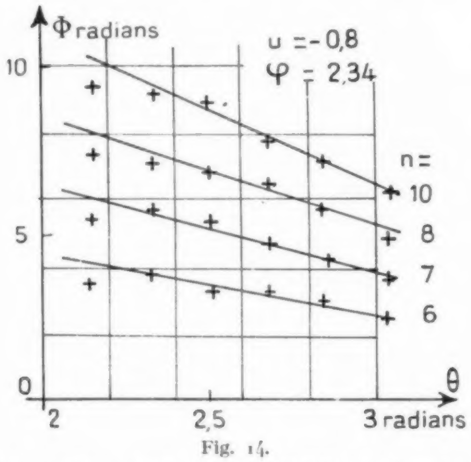


Fig. 14.

Les courbes en trait plein sont déduites des formules. Les points solés isont les résultats de mesures.

donnée par la formule simplifiée (23) suffit au calcul correct d'un réseau tant qu'on ne s'approche pas trop du point stationnaire de la courbe de phase.

Toutes ces expériences ont été faites sur des réseaux homogènes, c'est-à-dire constitués de plaques identiques également espacées. Nous avons vu que, en fonction de l'angle électrique θ donc en fonction de la fréquence, la transmission de ces réseaux présente des oscillations d'autant plus accentuées que les trous sont plus petits.

On peut construire aussi des réseaux dérivés de la technique dite du « maximally flat » dans les filtres passe-bande. La courbe de transmission est alors régulière dans toute la bande passante. Pour la détermination de ces réseaux on se reportera par exemple à l'article [6] sur les filtres passe-bande en hyperfréquences.

En résumé, nous avons constaté que l'accord entre l'expérience et le calcul est toujours excellent. Ce calcul, relativement simple, est basé sur la notion de guide fictif. Ces résultats sont donc une preuve de la fécondité de cette représentation.

Remarque. — On peut, à partir de ces éléments définir un indice équivalent du réseau étudié : ceci résulte de la linéarité en $n\theta$ de la formule (23). Mais, par suite des méthodes de calcul employées, cette notion ne présente pas ici le même intérêt qu'en optique. Notons seulement que le signe négatif du paramètre u conduit à attribuer au réseau un indice de réfraction inférieur à l'unité.

3. ÉTUDE D'UN RÉSEAU DE PLAQUES ÉCLAIRÉ EN INCIDENCE OBLIQUE.

Par suite du déphasage entre les éclairements des différents trous, la direction de propagation de l'onde transmise sera la même que celle de l'onde incidente.

Nous allons essayer de conserver encore la notion de guide fictif, bien que celle-ci cesse d'être vraie, en toute rigueur, dès qu'un déphasage apparaît entre les champs dans les ouvertures.

Mais avant d'aller plus loin nous allons montrer l'existence d'un angle d'incidence pour lequel toute l'énergie incidente est absorbée par le réseau.

3.1. Angle d'incidence critique.

Nous avons vu plus haut que, dans le cas général, le rayonnement d'un trou pouvait être représenté par celui d'un doublet magnétique, plus celui d'un doublet électrique (contribution de l'onde $E_{\|}$). La figure 5 indique le diagramme de rayonnement de ces deux doublets.

En toute rigueur, ces diagrammes sont vrais pour

les champs au loin. On admet qu'ils donnent encore une représentation acceptable des phénomènes à quelques longueurs d'onde des sources. On voit ainsi que la majeure partie de l'énergie contenue dans le doublet électrique (champ 2) est rayonnée parallèlement aux plaques et qu'une importante partie de l'énergie contenue dans le doublet magnétique (champ 1) est rayonnée aussi dans ce plan, dans la direction du plan d'incidence. Si l'on dispose maintenant une ligne de sources semblables, on peut concevoir qu'une onde puisse se propager le long de la plaque, et qu'elle soit en phase avec l'onde incidente en face de chaque trou.

Cette éventualité peut se produire dans le cas d'une onde $E_{\parallel}$ (*fig.* 15).

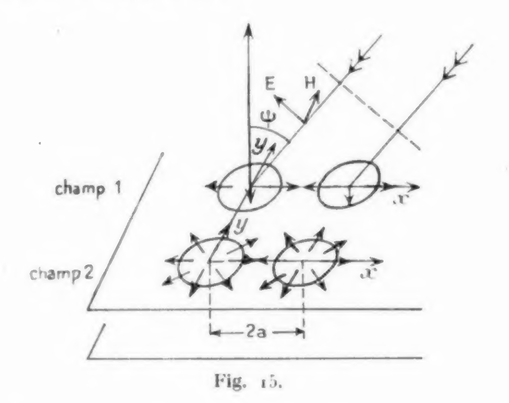


Fig. 15.

Dans le cas d'une onde $E_{\perp}$ l'énergie rayonnée dans le plan de l'écran l'est dans une direction perpendiculaire au plan d'incidence (*fig.* 16). Sur cet axe, tous les trous sont excités en phase et aucune

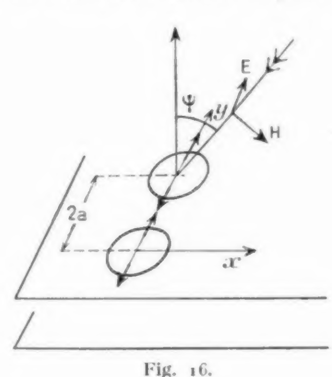


Fig. 16.

onde parasite ne peut se propager à moins que $2a = n\lambda$. Nous avons dit que l'entraxe des trous était inférieur à la longueur d'onde. *Le seul cas litigieux est donc celui d'une onde* $E_{\parallel}$.

Soit dans le plan d'incidence la trace P de la plaque, $O_1, O_2, \ldots, O_n$ les centres des trous, $2a$ la distance entre ces centres (*fig.* 17). Écrivons qu'une onde se propageant dans le milieu 2 suivant Ox se trouve en phase avec l'onde incidente en $O_1, O_2, \ldots, O_n$.

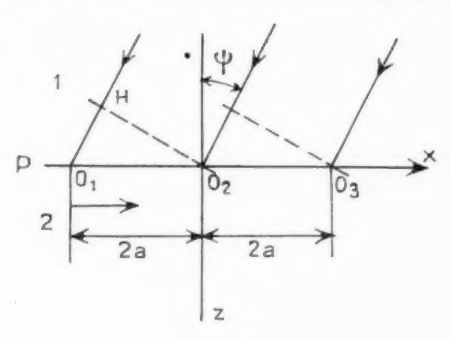


Fig. 17.

Il suffit d'écrire que le trajet électrique HO_1O_2 est égal à $2n\pi$. Si k_1 et k_2 sont les nombres d'ondes correspondant à la propagation dans les milieux 1 et 2, on a

$$k_1 . H_1O + k_2 . O_1O_2 = 2n\pi,$$

d'où l'on tire

$$(26) \qquad \sin\psi = n\frac{\lambda_1}{2a} - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \qquad (n \text{ entier}).$$

Supposant $\lambda_1 = \lambda_2$ et $\frac{\lambda_1}{2a} = 1{,}27$ (valeur déjà choisie pour les expérimentations en incidence normale), on trouve une seule solution pour

$$\sin\psi = 0{,}27, \qquad \text{soit} \quad \psi = 16°.$$

Nous appellerons cet angle l'angle critique. Remarquons que le milieu 2 peut être, soit tout l'espace situé derrière la plaque, soit l'espace compris entre deux plaques consécutives dans le cas d'un réseau. L'expérience vérifie bien ces conclusions. Pour une onde $E_{\parallel}$, la transmission d'un réseau parfaitement transparent en incidence normale devient négligeable pour une incidence d'environ 13°. On constate en même temps la naissance de modes se propageant entre les plaques dans le sens indiqué sur la figure 10, c'est-à-dire en sens inverse de la projection sur la plaque de la direction de propagation de l'onde incidente.

On a tracé sur la figure 18 la transmission de différents réseaux en fonction de l'angle d'incidence pour une onde $E_{\perp}$ et sur la figure 19 les courbes correspondantes pour une onde $E_{\parallel}$.

La figure 20 montre les variations de l'énergie absorbée entre chaque paire de plaques en fonction

de l'angle d'incidence. Nous verrons plus loin que les bosses qui apparaissent sur ces courbes s'expliquent aisément par la notion de surface de diffraction.

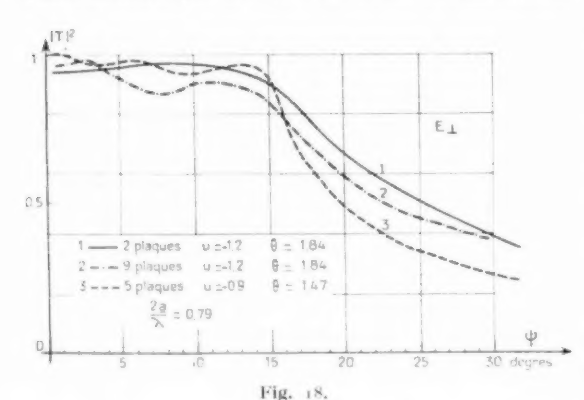


Fig. 18.

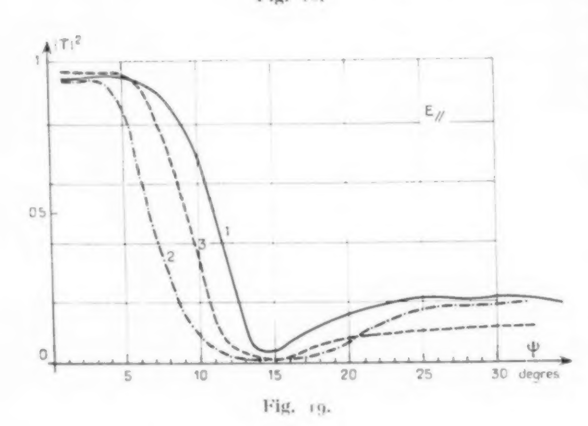


Fig. 19.

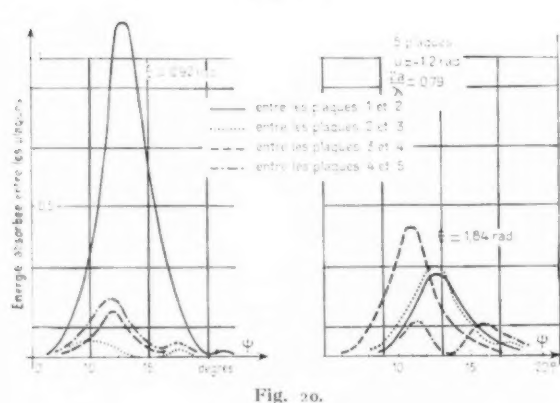


Fig. 20.

Les maxima sont peu éloignés des 16° obtenus à partir de l'équation (26) en supposant $\lambda_1 = \lambda_2$.

On en déduit que la vitesse de propagation des ondes entre les plaques est peu différente de celle dans l'air. Pour $\psi = 10°$, on trouve

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = 1,10.$$

Ce résultat, qui a été confirmé par d'autres expériences, est tout à fait remarquable parce qu'il montre que la vitesse de phase de ces ondes est inférieure à celle de la lumière dans l'espace libre.

Nous avons donc un milieu dont l'indice est inférieur à 1 dans le sens longitudinal et supérieur à 1 dans le sens transversal.

3.2. Élargissement de la zone utile.

La naissance des modes parasites représente, pour l'utilisation d'un réseau en incidence oblique une limitation qu'il est souhaitable de repousser le plus loin possible. *Il découle de la formule* (26) *que ce résultat peut être atteint en diminuant l'écartement entre les ouvertures.* La figure 21 montre comment varie l'angle d'incidence critique du réseau étudié en fonction de cet écartement.

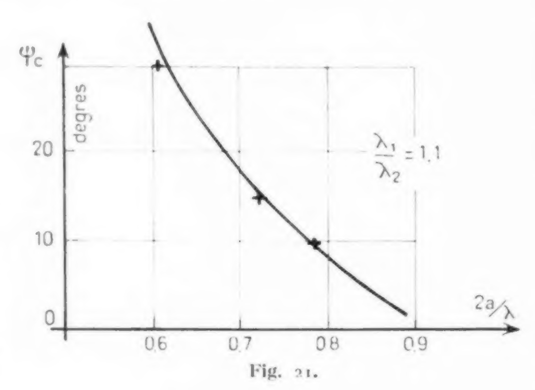


Fig. 21.

L'expérience vérifie très bien le calcul. On voit que la variation de l'angle critique est rapide et qu'il est facile de le repousser vers 25 ou 30°. Dans l'application des réseaux à la réalisation de lentilles électromagnétiques, les incidences élevées se produisent sur les bords, là où le déphasage introduit par la lentille doit être important. Les trous sont alors de

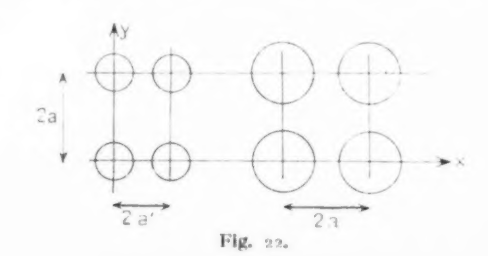


Fig. 22.

petit diamètre et rien ne s'oppose alors à resserrer le quadrillage, au moins dans une dimension (*fig.* 22). Dans le dernier cas il faut remarquer que les paramètres des plaques seront différents suivant que la polarisation de l'onde incidente sera dirigée suivant Ox ou Oy. Un tel réseau devient en effet l'analogue d'un cristal biaxe en optique cristalline.

C'est ce qui apparaît sur les courbes de la figure 23 où l'on a tracé la transmission d'un réseau de deux plaques pour différents quadrillages, et pour des

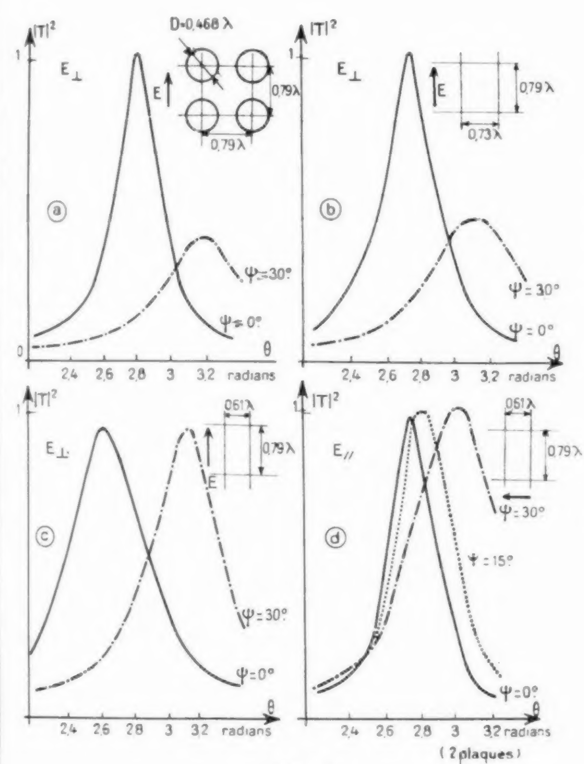


Fig. 23.

angles d'incidences de 0, 15 et 30°. On constate que le maximum de transmission (c'est-à-dire le facteur de phase φ des plaques) varie avec le quadrillage et varie de façon différente suivant la polarisation de l'onde incidente.

La figure 24 représente les variations de ce paramètre.

Remarque 1. — Cette étude est orientée vers la réalisation de lentilles électromagnétiques. Aussi avons-nous considéré les modes se propageant entre les plaques, comme des modes parasites. Il peut ne pas en être toujours ainsi. On peut par exemple concevoir une antenne où l'énergie incidente est

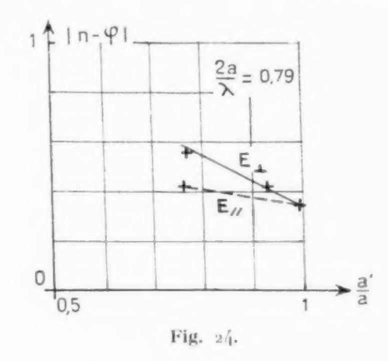


Fig. 24.

entièrement absorbée par les modes parasites (*fig.* 25). Inversement, si nous excitons cette antenne par la tranche, elle rayonnera dans la direction faisant l'angle ψ_c avec la normale à sa surface. L'allure des courbes de la figure 20 s'explique alors à partir de la notion de surface de diffraction d'une antenne.

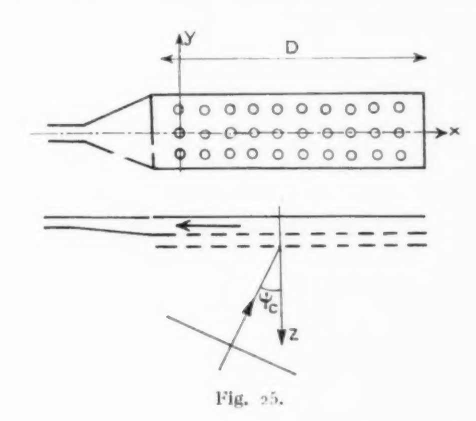


Fig. 25.

Si l'on suppose l'illumination constante, la largeur du lobe principal est, mesurée à 3 dB,

$$\Theta = 50\,\frac{\lambda}{D} \quad \text{(degrés)}. \tag{26}$$

En prenant pour D le diamètre des paraboles d'excitation, soit 50 cm, on trouve $\Theta = 3^\circ 5$ en bon accord avec les courbes expérimentales.

Remarque 2. — Dans l'étude de la répartition des champs, nous avons vu que nous pouvions considérer la diffraction circulaire comme la superposition de deux rayonnements. Le premier est celui d'un doublet magnétique, le second d'un doublet élec-

trique. En répartissant convenablement de telles sources et en faisant prédominer l'un ou l'autre de ces modes on peut obtenir un rayonnement dirigé dans l'axe, ou omnidirectionnel autour de cet axe. Ces remarques sont valables aussi pour des disques métalliques. On atteint ainsi d'autres types d'antennes, notamment les antennes « cigares » développées à la Compagnie Générale de T.S.F. par J. C. Simon et G. Weill [7].

3.3. Extension de l'assimilation à une propagation guidée.

1° *Considérons d'abord* une rangée de trous éclairés en phase, c'est-à-dire, centrés sur une droite perpendiculaire au plan d'incidence (*fig.* 26).

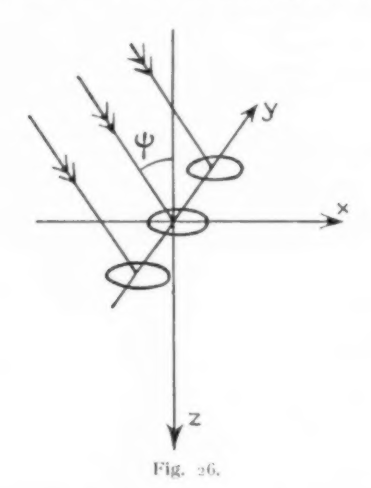


Fig. 26.

Le calcul fait dans le cas de l'incidence normale reste valable. On démontre (3) ainsi aisément que tout plan d'incidence, médiateur du segment joignant les centres de deux ouvertures peut être considéré comme un plan d'impédance infinie dans le cas d'une onde $E_{\parallel}$, comme un plan d'impédance nulle dans le cas d'une onde $E_{\perp}$.

2° *Considérons maintenant* une rangée de trous perpendiculaire à la précédente. Les champs dans les ouvertures sont alors déphasés de la distance électrique séparant les plans d'onde passant par les centres des trous, soit

$$2d = 2a \sin\psi \quad (\textit{fig. } 27).$$

Prenant pour origine des phases le sommet O du trièdre de référence, les composantes du champ en P_1 s'écrivent : $E_x e^{ikd}$ et $E_y e^{ikd}$.

(3) *Cf.* note (1).

Nous savons que la direction de propagation de l'onde transmise est celle de l'onde incidente. Les guides équivalents, s'il en existe, ont leur axe parallèle à cette direction.

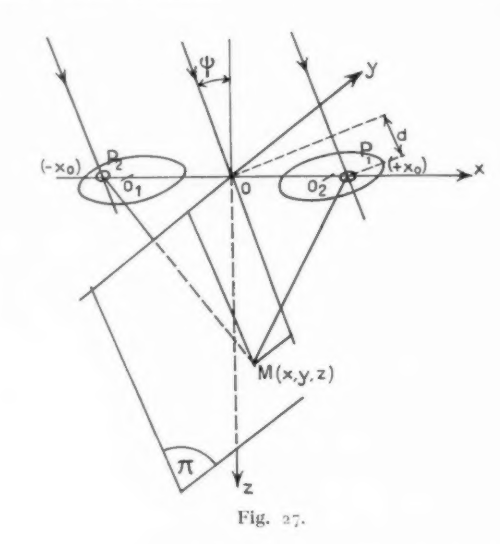


Fig. 27.

A l'infini, c'est-à-dire en pratique, assez loin de l'écran pour que l'onde plane soit correctement formée, il est toujours possible de décomposer l'espace en guides semblables à ceux introduits dans l'étude du réseau en incidence normale.

Nous en avons déjà défini ici deux parois parallèles au plan d'incidence; voyons ce que nous pouvons dire des deux autres lorsqu'on se rapprroche de l'écran.

Tous les plans d'impédance nulle ou infinie introduits jusqu'ici satisfont, entoute rigueur, aux conditions de définition [éq. (9) et (10)]. On conçoit cependant qu'il soit possible, sans pratiquement changer l'état électromagnétique d'un système, de métalliser une surface en tout point de laquelle la composante tangentielle du vecteur électrique reste inférieur à $\frac{1}{N}$ fois sa composante normale. La perturbation sera naturellement d'autant plus faible que N sera plus grand. On définira de même un écran magnétique correspondant à la surface d'impédance infinie.

Ceci posé on admettra que la décomposition de l'espace en guides fictifs reste vraie, sauf à proximité de l'écran, cette zone constituant en même temps qu'un obstacle, un couplage entre les différents guides. On conçoit enfin que l'importance de ce couplage croisse avec l'angle d'incidence.

Nous allons maintenant préciser ces notions en

calculant le champ électrique sur le plan II, perpendiculaire au plan d'incidence et passant par l'axe Oy.

Soit M(x, y, z) un point de ce plan (*fig.* 27).

Pour calculer le champ diffracté en M, nous associons encore les champs élémentaires rayonnés par les points P_1 et P_2 symétriques par rapport à Oy. Mais si les champs en P_1 et P_2 se déduisent simplement l'un de l'autre, il n'en est plus de même des termes $\overrightarrow{\text{grad}}\,\Psi$ relatifs aux distances P_1M et P_2M.

On montre que, pour des angles d'incidence pas trop importants ($\psi < 30°$) les composantes de $\overrightarrow{\text{grad}}\,\Psi$ s'écrivent (voir Annexe) :

$$(27)\quad \begin{cases} X = A\dfrac{x - x_0}{r_0}\,e^{-ikx_0\frac{\rho}{r_0}\sin\psi}, \\ Y = A\dfrac{y}{r_0}\,e^{-ikx_0\frac{\rho}{r_0}\sin\psi}, \\ Z = A\dfrac{z}{r_0}\,e^{-ikx_0\frac{\rho}{r_0}\sin\psi}, \end{cases}$$

avec

$$\rho^2 = x^2 + z^2,$$
$$r_0^2 = x^2 + y^2 + z^2 + x_0^2.$$

A est une constante; x_0 est l'abscisse du point P_1.

Pour passer du point P_1, au point P_2, il suffit de changer x_0 en $-x_0$ et, dans le cas présent ($E_\parallel$, champ 1), E_y en $-E_y$.

On trouve alors pour le champ rayonné en M par P_1 et P_2

$$(28)\quad \begin{cases} \vec{E}_M = \vec{x}\;2AE_x\dfrac{z}{r_0}\cos(\xi kx_0\sin\psi) \\ \quad + \vec{y}\;2AE_y\dfrac{z}{r_0}\sin(\xi kx_0\sin\psi)\,e^{i\frac{\pi}{2}} \\ \quad + \vec{z}\left\{2AE_x\dfrac{x}{r_0}\cos(\xi kx_0\sin\psi)\right. \\ \quad \left. + 2A\left[E_y\dfrac{y}{r_0} - E_x\dfrac{x_0}{r_0}\right]\sin(\xi kx_0\sin\psi)\right\}e^{i\frac{\pi}{2}}, \end{cases}$$

avec

$$\xi = 1 - \frac{\rho}{r_0}.$$

Nous négligerons E_y, faible devant E_x, et dont l'importance diminue encore si l'on associe à P_1 et P_2 leurs symétriques par rapport à Ox.

Soient E_N (M) et E_T (M) et les composantes de E(M) respectivement normales à II et situées dans ce plan. On a

$$(29)\quad \begin{cases} E_N(\text{M}) = 2AE_x\left[\dfrac{\rho}{r_0}\cos(\xi kx_0\sin\psi)\right. \\ \qquad \left. - \dfrac{x_0}{r_0}\sin(\xi kx_0\sin\psi)\sin\psi\,e^{i\frac{\pi}{2}}\right], \\ E_T(\text{M}) = 2AE_x\dfrac{x_0}{r_0}\sin(\xi kx_0\sin\psi)\cos\psi\,e^{i\frac{\pi}{2}}. \end{cases}$$

La zone de couplage entre les guides fictifs est définie par l'inégalité

$$(30)\qquad \frac{E_T}{E_N} = \frac{x_0}{\rho}\,\text{tg}(\xi kx_0\sin\psi)\cos\psi < \frac{1}{N},$$

condition qui revient sensiblement à

$$(31)\qquad \left(\frac{x_0}{OM}\right)^3 kx_0\sin\psi\cos\psi < \frac{1}{N}.$$

Une application numérique conduit, pour $N = 10$ et $\psi = 30°$; à un rayon inférieur à $\frac{\lambda}{2}$. Les zones de couplages sont donc de petites dimensions et s'intègrent parfaitement à la géométrie des réseaux.

Ces formules montrent en outre que la surface de couplage varie comme ($\sin^{\frac{2}{3}}\psi$) tandis que le champ tangentiel dans cette zone varie comme $\sin\psi$. Ce calcul a été fait dans le cas d'une onde $E_\parallel$ et relativement à sa répartition de champ n° 1. Dans le cas du champ n° 2, les conditions de symétrie des champs dans les ouvertures sont inversées. Le calcul conduit alors à un guide dont les quatre parois sont, sauf à proximité des plaques, d'impédances infinies.

Dans les cas usuels ($\lambda < 2a$) on se trouvera toujours au-dessous de la fréquence de coupure, et aucun mode ne pourra s'y propager.

Dans le cas d'une onde $E_\perp$ les résultats sont complémentaires de ceux trouvés pour l'onde $E_\parallel$.

En résumé nous avons pu maintenir la représentation guidée en incidence oblique en introduisant entre les divers guides des couplages situés dans la zone des obstacles.

3.4. Mise en équation du problème.

Nous supposerons maintenant que l'entraxe des trous est tel que l'angle d'incidence critique soit rejeté hors de notre domaine d'expérimentation.

Pour étendre au cas général la représentation guidée si commode en incidence normale, nous avons été conduit à introduire entre ces différents guides, des couplages situés dans les plans des obstacles. Nous allons tout d'abord généraliser au cas d'un réseau de guides couplés les notations utilisées plus haut dans le cas d'un guide isolé.

3.4.1. Étude d'un réseau de guides couplés. — Considérons (*fig.* 28) un réseau plan de guides d'ondes identiques traversés par le même obstacle P et couplés par des ouvertures O, toutes semblables et symétriques par rapport au plan de symétrie électromagnétique de l'obstacle. Chaque guide est

excité à son extrémité par une onde unité, déphasée d'un angle constant ξ par rapport à celle qui excite le guide d'ordre immédiatement supérieur.

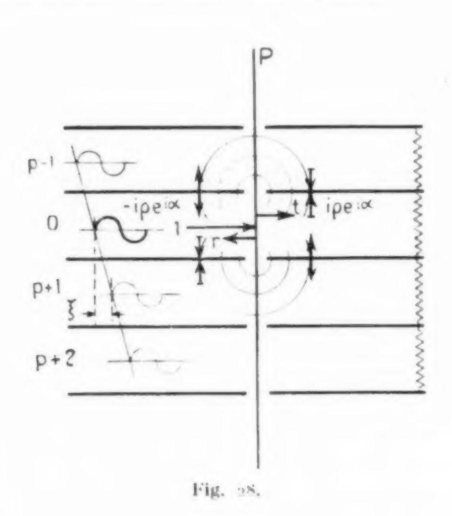


Fig. 28.

Tous ces guides sont fermés sur des charges adaptées.

Nous représenterons encore l'état du système par les coefficients de transmission (t) et de réflexion (r) relatifs à chaque guide. Le réseau étant supposé infini, ces coefficients sont les mêmes pour tous les guides.

Excitons tout d'abord le système par le seul guide p (*fig.* 28). La méthode de perturbation utilisée au début de cet article dans le cas de la diffraction d'un écran plan, s'applique encore. Nous connaissons la solution du problème en l'absence de couplage, soit

$$(32)\qquad \begin{cases} t_p = i\sin u\, e^{i\varphi}, & t_q = 0; \\ r_p = \cos u\, e^{i\varphi}, & r_q = 0, \end{cases}$$

q étant quelconque, mais différent de p.

Dans le cas général, il nous faut introduire dans les ouvertures O une répartition de champs telle que le champ total satisfasse en tout point des parois aux conditions aux limites. Si l'obstacle n'est pas trop réfléchissant ($|u| > 0{,}5$), nous pouvons admettre que ce champ de perturbation est symétrique par rapport à P. Il rayonne donc de la même façon vers les quatre extrémités des deux guides.

Enfin, pour simplifier les calculs, nous supposons que les couplages sont suffisamment faibles pour qu'on puisse limiter l'influence d'un guide à ses deux voisins.

Nous écrivons donc

$$(33)\qquad \begin{cases} t_p = i\sin u\, e^{i\varphi} + 2i\rho\, e^{i\alpha}, \\ r_p = \cos u\, e^{i\varphi} - 2i\rho\, e^{i\alpha}, \\ t_{p+1} = i\rho\, e^{i\alpha}, \\ r_{p+1} = -i\rho\, e^{i\alpha}, \\ t_{p-1} = i\rho\, e^{i\alpha}, \\ r_{p-1} = -i\rho\, e^{i\alpha}, \end{cases}$$

ρ et α étant deux paramètres représentant l'amplitude et la phase de l'onde rayonnée par les champs de perturbation.

Le même raisonnement est valable, au facteur de phase $e^{\pm i\xi}$ près, lorsque le système est excité en $p - 1$ ou en $p + 1$. En additionnant ces trois états, on trouve

$$(34)\qquad \begin{cases} t = i\sin u\, e^{i\varphi} + 2i\rho(1 + \cos\xi)\, e^{i\alpha}, \\ r = \cos u\, e^{i\varphi} - 2i\rho(1 + \cos\xi)\, e^{i\alpha}. \end{cases}$$

Si ξ est nul, la condition $|t|^2 + |r|^2$ exprimant la conservation de l'énergie dans chaque guide doit être satisfaite par raison de symétrie. On en déduit une relation liant ρ à α

$$(35)\qquad 4\rho = \sin\alpha.$$

Le système (34) s'écrit alors

$$(36)\qquad \begin{cases} t = i\sin u\, e^{i\varphi} + i\sin\alpha\, \dfrac{1 + \cos\xi}{2}\, e^{i\alpha}, \\ r = \cos u\, e^{i\varphi} - i\sin\alpha\, \dfrac{1 + \cos\xi}{2}\, e^{i\alpha}. \end{cases}$$

Dans le cas général où ξ n'est pas nul, la condition $|t|^2 + |r|^2 = 1$ n'est plus vérifiée. On a

$$(37)\qquad |t|^2 + |r|^2 = 1 - \frac{\sin^2\alpha \sin^2\xi}{2}.$$

Il y a absorption d'énergie dans le canal formé par les trous de couplage. Pour avoir dans quel sens se propage cette énergie il est nécessaire d'introduire

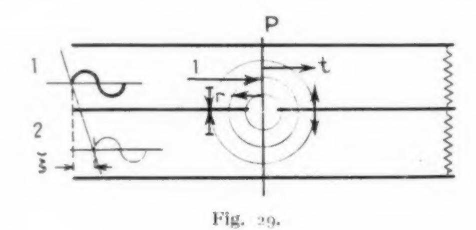


Fig. 29.

des limites au réseau supposé jusqu'ici infini. Considérons, par exemple, deux guides d'ondes couplés comme l'indique la figure 29.

Un raisonnement analogue au précédent conduit

aux formules

$$(38)\quad \begin{cases} t = i \sin u \, e^{i\varphi} + \frac{1}{2} i \sin \alpha \, e^{i\alpha}(1 + e^{i\xi}), \\ r = \cos u \, e^{i\varphi} - \frac{1}{2} i \sin \alpha \, e^{i\alpha}(1 + e^{i\xi}), \end{cases}$$

et l'énergie cédée par le guide 1 au guide 2 s'écrit

$$(39)\quad w = \frac{1}{2} \sin 2\alpha \sin \xi.$$

Le signe de w dépend donc de celui de α.

Si α est positif, l'échange d'énergie se fera dans le sens de 2 vers 1 si l'onde 2 est en avance sur l'onde 1.

3.4.2. Application a l'étude des réseaux éclairés en incidence oblique. — Nous définirons d'abord les quantités ξ et α pour les rattacher aux données de notre problème.

La signification de ξ est évidente, c'est le déphasage entre les champs existant dans deux ouvertures voisines. On a, avec les notations précédentes,

$$(40)\quad \xi = ka \sin \psi.$$

α caractérise le couplage entre les guides. On voit sur les formules (33) et (35) que $\frac{1}{4}\sin \alpha$ représente le champ rayonné par l'élément de couplage. Ce champ varie, d'une part comme la composante tangentielle du champ dans l'ouverture de couplage, et d'autre part, comme la puissance $\frac{3}{2}$ de la surface de cette ouverture [éq. (6) et (7)]. Nous avons vu que ces deux quantités varient chacune comme $\sin \psi$. Nous poserons donc, C étant une constante,

$$(41)\quad \sin \alpha = C \sin^2 \psi.$$

Lorsque ψ tend vers $\frac{\pi}{2}$, l'ouverture de couplage devient très grande et $|\sin \alpha|$ tend vers 1. On a donc

$$(42)\quad \sin \alpha = \pm \sin^2 \psi.$$

Joint à ces définitions, le système (36) constitue l'extension au cas général du système (11) base de nos calculs en incidence normale.

3.5. **Étude de la transmission du réseau.**

La signification du système (36) sera plus nette si nous mettons en évidence le module et la phase des coefficients t et r. Posons

$$(43)\quad \begin{cases} t = i(1 - \varepsilon) \sin(u + v) \, e^{i(\varphi + \chi)}, \\ r = (1 - \varepsilon) \cos(u + v) \, e^{i(\varphi + \chi')}. \end{cases}$$

Ainsi définies, les nouvelles quantités ε, v, χ et χ' tendent vers zéro avec l'angle d'incidence. Dans le domaine des approximations déjà faites $\left(\psi < \frac{\pi}{6}, u > 0,5\right)$, on trouve

$$(44)\quad \begin{cases} \varepsilon = \frac{1}{4} \sin^2 \alpha \sin^2 \xi \# \frac{1}{4} k^2 a^2 \psi^6, \\ v = -\alpha = \mp \psi^2, \\ \chi \# \chi' \# \alpha = \pm \psi^2. \end{cases}$$

La quantité ε étant toujours très petite, l'analogie entre le système (43) et le système fondamental (11) est évidente.

Tant que ε sera suffisamment faible pour pouvoir être négligée (et nous verrons plus loin la condition exacte), nous aurons ramené le problème général à celui, déjà étudié, de l'incidence normale. Les corrections à apporter aux paramètres u et φ s'expriment simplement en fonction de α, donc de ψ. Les résultats expérimentaux (par exemple, *fig.* 23) conduisent à attribuer à α le signe positif. Nous écrivons donc

$$(45)\quad \boxed{\begin{aligned} t &= i(1 - \varepsilon) \sin(u - \psi^2) \, e^{i(\varphi + \psi^2)}, \\ r &= (1 - \varepsilon) \cos(u - \psi^2) \, e^{i(\varphi + \psi^2)}. \end{aligned}}$$

Le simple examen du système (45) permet alors l'énoncé des résultats suivants :

Tant que ε est suffisamment petit pour pouvoir être négligé, la courbe de transmission d'un réseau homogène éclairé en incidence oblique garde la même allure que celle tracée figure 9 dans le cas de l'incidence normale. La bande passante se trouve élargie ($\Delta\theta = 2\psi^2$); les sinusosités de la courbe sont moins accentuées [$T_{min} = |\sin(u - \psi^2)|$]; enfin le centre de la bande passante se trouve déporté vers la droite ($\Delta\theta = \psi^2$). Si ε n'est plus négligeable, l'allure générale de la courbe, est conservée mais la transmission du réseau reste toujours inférieure à l'unité. Pour un réseau de n plaques, on a

$$(46)\quad |T_{max}| \# 1 - \frac{n\varepsilon}{\sin^2(u - \psi^2)} = 1 - \frac{n k^2 a^2 \psi^6}{4 \sin^2(u - \psi^2)}.$$

Par suite de la naissance des modes parasites, nous avons vu que l'utilisation d'un réseau éclairé paru ne onde $E_{\|}$, nécessitait un entraxe $2a$ d'autant plus petit que l'angle d'incidence était lui-même plus grand. La formule (46) conduit à la même conclusion, quel que soit le type d'onde considéré. Elle est en outre d'autant plus restrictive que le nombre des plaques est plus grand.

Ces résultats sont en accord avec les tracés expéri-

mentaux. Considérons, par exemple, les courbes de la figure 23 relatives à un système de deux plaques. Nous voyons que l'angle θ_0 (distance électrique à la résonance) croît avec l'angle d'incidence. La coïncidence entre la formule théorique et les résultats de mesures est excellente, ainsi qu'on peut le constater sur le tableau I.

TABLEAU I.

	Degrés ψ.	Radians. $\Delta\theta$ mesuré.	Radians. ψ^2.
Fig. 23 *d*	0......	0	0
	15......	0,070	0,069
	30......	0,27	0,27

Le tableau II permet la comparaison entre les transmissions maxima mesurées pour $\psi = 30°$, et leurs valeurs déduites de la formule (46).

TABLEAU II.

		$\frac{2a}{\lambda}$.	k^2a^2.	u.	$T_{\max}$ calculé.	$T_{\max}$ mesuré.
Fig. 23	*a* ...	0,79	6,25	0,34	0,6	0,4
	b ...	0,73	5,3	0,41	0,7	0,5
	c	0,61	3,7	0,6	0,90	0,95

Compte tenu des hypothèses et des approximations faites pour obtenir les formules simples du système (45), ces résultats peuvent être considérés comme très satisfaisants.

Examinons enfin la variation du déphasage Φ introduit par le réseau en fonction de l'angle d'incidence. La formule exacte (21) se généralise aisément au cas de l'incidence oblique. Il suffit de remplacer dans cette équation u par $u - \psi^2$, φ par $\varphi + \psi^2$ et θ par $\frac{\theta}{\cos\psi}$. La discussion s'en trouve, hélas, plus difficile encore que dans le cas de l'incidence normale. Aussi est-il préférable d'écrire $\Phi(\psi)$ à partir de la formule simplifiée (23). On obtient

$$(47)\quad \Phi(\psi) - \Phi(0) = n\psi^2 \left\{ \frac{1 - \frac{\theta}{2}[1 + \sin(u - \psi^2)] - (\theta - \varphi)\cos u}{-\sin(u - \psi^2)} \right\}.$$

Pour diminuer le nombre des paramètres, supposons d'abord que $\theta = \varphi$. Nous nous plaçons ainsi pour l'incidence normale au centre de la bande passante du réseau. φ étant toujours voisin de $\pi + u$, le déphasage $\Phi(\psi)$ ne dépend que du seul paramètre u. Le terme entre crochets ne variant que peu avec ψ, du moins dans le domaine envisagé, ***la variation de phase est sensiblement parabolique*** $[n\psi^2 F(u)]$. On a tracé sur la figure 30, ces variations de la fonction $[\Phi(\psi) - \Phi(0)]\frac{1}{n}$ pour diverses valeurs usuelles de u.

Si $\theta - \varphi$ est différent de zéro, l'allure de ces courbes peut être notablement modifiée.

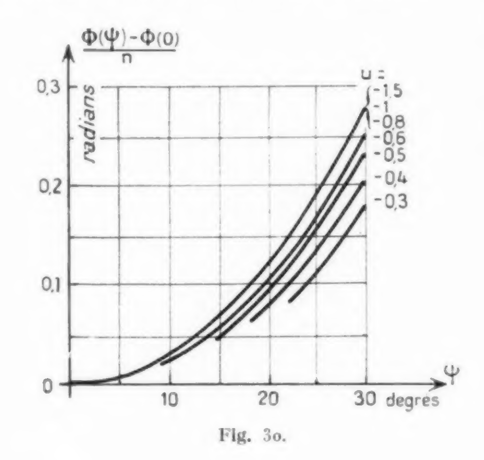


Fig. 30.

Pour des valeurs de θ inférieures à φ, il arrive en effet que le terme $(\theta - \varphi)\cos u$ soit du même ordre de grandeur que $1 - \frac{\theta}{2}[1 + \sin(u - \psi^2)]$ et de signe opposé.

L'expression entre crochets peut alors s'annuler pour un certain angle ψ_0.

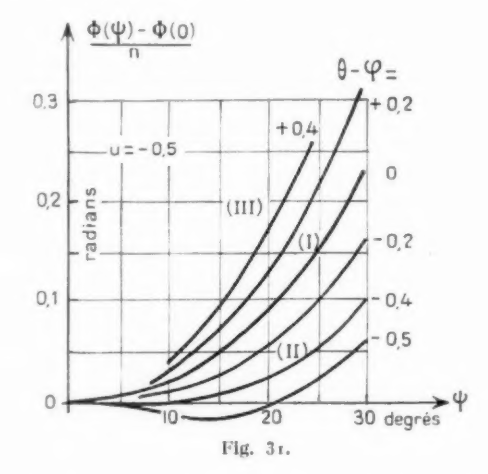


Fig. 31.

La figure 31 indique les diverses courbes que l'on peut obtenir tout en restant à l'intérieur de la bande passante du réseau ($|\theta - \varphi| < |u|$). Les courbes du type de II présentent un intérêt tout particulier, car :

En conservant un déphasage pratiquement constant dans un domaine étendu, elles permettent d'envisager la réalisation de lentilles électromagnétiques aplanétiques.

4. ANALOGIES OPTIQUES. REMARQUES SUR LA RÉFRACTION.

Le but de ce travail étant la réalisation de lentilles électromagnétiques de structure donnée, nous nous sommes volontairement limité à l'étude des seules caractéristiques intervenant dans ce problème : transmission, déphasage. Or les idées qui ont présidé à la construction des premiers diélectriques artificiels laissent prévoir une analogie étroite entre le comportement de nos réseaux et celui d'un diélectrique ou d'une lame cristalline en optique classique. Ce parallélisme a déjà été mis en évidence par J. C. Simon [2], qui a montré que la structure étudiée pouvait être considérée comme l'analogue d'un cristal uniaxe. Il serait sans doute intéressant d'orienter maintenant notre étude dans un sens « optique » en cherchant à définir, à partir des résultats acquis les notions d'indice, de surface des indices ou de trajet d'un rayon lumineux. Une telle étude sortant du cadre de cet article, nous nous bornerons à quelques constatations simples :

1° Le réseau que nous avons étudié est le complément électrique du réseau de disques considéré par Kock [1]. Ce réseau de disques est lui-même dérivé du réseau de sphères représentant, à l'échelle des ondes centimétriques, les molécules des diélectriques ou des cristaux éclairés par des ondes lumineuses ou par des rayons X. On montre en effet que la répartition des champs n'est que peu modifiée si l'on remplace ces sphères par leur grand cercle normal à la direction de propagation de l'onde incidente (*cf.* [1], *fig.* 5). Ces deux structures sont cependant très dissemblables. Alors que les caractéristiques d'un réseau de sphères ne varient guère (ou pas du tout) avec la direction de l'onde incidente, celles d'un réseau de disques sont essentiellement différentes suivant qu'on l'éclaire normalement ou parallèlement au plan des disques.

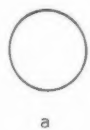
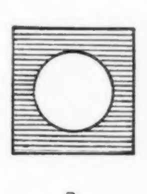


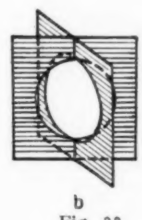




Fig. 32.

Nous aurions obtenu une meilleure représentation du réseau de sphères en considérant deux ou mieux trois grands cercles perpendiculaires deux à deux (*fig.* 32). La cellule du réseau complémentaire est représentée sur la figure 33. Il apparaît sur les





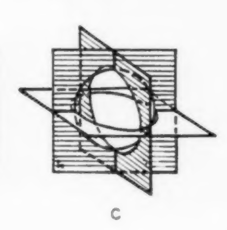


Fig. 33.

schémas *b* et *c* que les notions de guides et de couplage entre guides introduits à propos du schéma (*a*) ne sont plus de simples intermédiaires mathématiques, mais possèdent une réalité physique évidente. On remarque aussi qu'il n'y a pas de différences essentielles entre la nature de ces ouvertures.

2° On sait que le retard de phase des ondes lumineuses traversant un diélectrique, s'explique par la diffraction des électrons libres qui transforment les molécules du diélectrique en dipoles oscillants.

Nous avons vu que la diffraction d'une ouverture percée dans un écran plan pouvait être représentée par le rayonnement d'un doublet magnétique, plus celui d'un doublet électrique; ce dernier apparaissant comme une contribution de l'incidence oblique. Les diagrammes de ces deux doublets ont été tracés sur la figure 5. On constate qu'ils se déduisent l'un de l'autre par rotation de $\frac{\pi}{2}$ autour de l'axe Ox, exactement comme les plans définissant les dièdres des figures 32 *b* et 32 *c*.

3° Nous avons vu enfin que, dans un système de guides couplés, il y avait absorption d'énergie dans le canal formé par les ouvertures de couplage. Dans le cas d'un réseau, *ce glissement de l'énergie.*

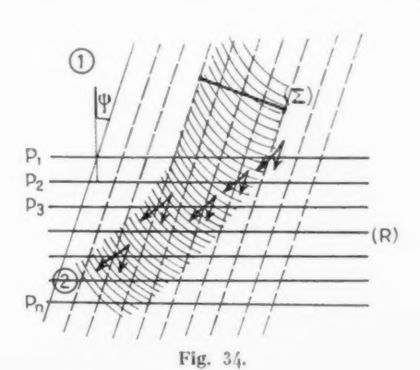


Fig. 34.

dans le plan des plaques représente le phénomène connu en optique sous le nom de réfraction.

Considérons, en effet, (*fig.* 34) un réseau R éclairé sous l'angle ψ par une portion d'onde plane (Σ). (Σ) est évidemment très grand devant la longueur d'onde; nous la supposons néanmoins finie. C'est l'hypothèse analogue que l'on fait en optique pour définir un pinceau lumineux. Il est facile de voir que l'échange d'énergie entre les différents guides fictifs se traduit par une courbure du canal dans lequel se trouve concentrée l'énergie. Compte tenu du signe que nous avons été amené à attribuer à α ($\alpha > 0$), la formule (39) conduit au schéma de la figure 34. Du point de vue de l'optique, ce phénomène caractérise le passage d'un milieu d'indice N_1, à un milieu d'indice N_2, inférieur à N_1. Ici le milieu 1 est le vide et le réseau apparaît comme une substance d'indice inférieure à 1.

C'est bien le résultat auquel nous avons abouti par le simple examen de la vitesse de phase dans le cas de l'incidence normale.

5. CALCUL D'UNE LENTILLE.

Le rôle d'une lentille est de transformer une surface d'onde S donnée en une surface Σ jouissant de certaines propriétés (*fig.* 35). Il s'agit presque toujours de transformer en onde plane l'onde rayonnée par

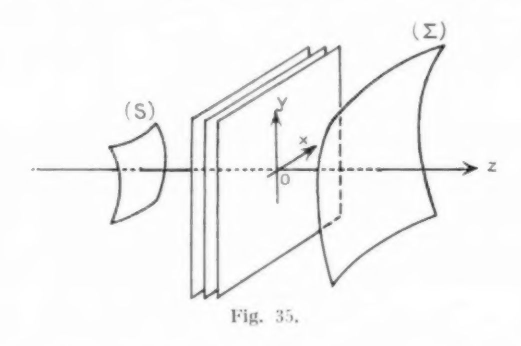


Fig. 35.

une source linéaire ou ponctuelle. Le problème est alors défini par la fonction de phase $\Phi(x, y)$ donnant le déphasage que doit introduire le réseau en chaque point (x, y) de sa surface (*fig.* 36). Ce déphasage $\Phi(x, y)$ est obtenu en variant le diamètre des trous. On a vu que pour un écartement des plaques donné, le déphasage d'un réseau homogène est fonction linéaire du nombre des plaques. L'épaisseur minimum de la lentille se trouve donc fixée par l'amplitude $\Delta\Phi$ de sa courbe de phase (*fig.* 37). Pour réduire cette épaisseur, on utilisera des trous dont le rapport des diamètres sera le plus grand possible, mais on se trouve limité;

— d'un côté par les dimensions du quadrillage;
— de l'autre par la bande passante requise et la précision nécessaire au montage.

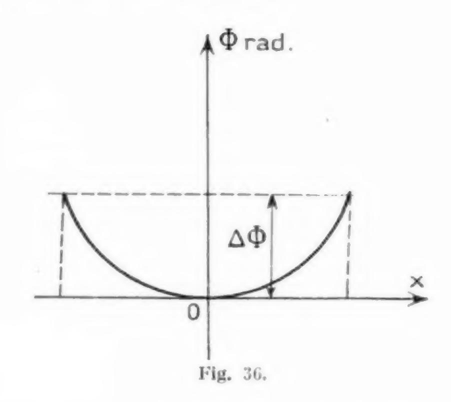


Fig. 36.

En effet, les petits trous sont caractérisés par des u faibles donc des bandes passantes étroites et profondément modelées.

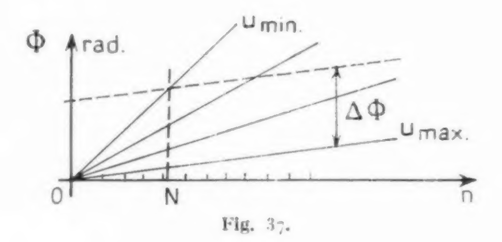


Fig. 37.

La transmission en module et phase sera une fonction rapidement variable de l'intervalle entre les plaques. On se trouve ainsi limité, en pratique, à des $|u|$ supérieurs à 0,4 ou 0,5 radian.

Un calcul simple permet de préciser ces résultats. De la formule (23), on tire

$$(48) \qquad \Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 = n\left[\frac{\theta - \varphi_2}{\sin u_2} - \frac{\theta - \varphi_1}{\sin u_1}\right].$$

Les indices 1 et 2 rapportent respectivement aux trous de plus grand et de plus petit diamètre. Sin u_1 est alors voisin de 1, et pour des raisons que nous développerons plus loin, $\theta - \varphi_2$ voisin de zéro. On a alors

$$(49) \qquad \Delta\Phi \# n(\varphi_2 - \varphi_1) = n(u_1 - u_2).$$

En particulier, si

$$|u_1| \# \frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad |u_2| \# 0,5,$$

on a

$$\Delta\Phi^{\text{rad}} \simeq n. \tag{50}$$

Si le déphasage $\Delta\Phi$ est élevé, c'est-à-dire si la lentille est de grande ouverture, cette formule conduit à un nombre de plaques qui peut être prohibitif. On décompose alors la surface de la lentille en « échelons » [2]. Pour cela on coupe la surface de phase $\Phi(x, y)$ par des plans distants de 2π, puis on ramène toutes les couronnes ainsi définies dans un seul intervalle $0 - 2\pi$ (*fig.* 38). L'épaisseur de la lentille est ainsi limitée à 3 ou 4λ.

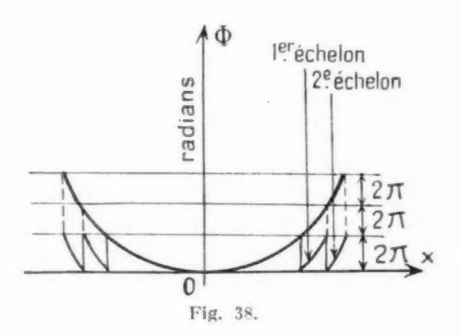


Fig. 38.

Pour que ce système donne de bons résultats, il faut que le nombre des échelons soit faible et leur longueur supérieure à 2λ.

Connaissant une valeur approchée du nombre des plaques ainsi que les caractéristiques extrêmes des éléments à notre disposition (u_1 et u_2), nous pouvons choisir l'écartement optimum qui permettra une transmission correcte en tout point de la surface de la lentille.

Nous avons vu que la bande passante d'un réseau homogène de paramètre caractéristique u est défini par

$$\pi < \theta < \pi + 2u.$$

En choisissant θ à l'intérieur de la bande passante relative aux trous de plus petit diamètre, nous nous trouverons donc *a fortiori* dans la bande passante relative à n'impore quel autre trou (*fig.* 39). *Nous nous placerons toujours le plus près possible de* $\theta = \pi + u_2$. L'écart entre les déphasages des différents trous est alors maximum, ce qui permet de réduire un peu le nombre de plaques, donc l'épaisseur de la lentille. n et θ étant choisis, nous pouvons tirer de la formule (23) la fonction $u(x, y)$ définissant le paramètre caractéristique de la lentille en chaque point de sa surface.

Si l'intervalle de variation de u ainsi obtenu diffère de celui que nous nous sommes imposé au départ, nous reprendrons ce calcul avec une nouvelle

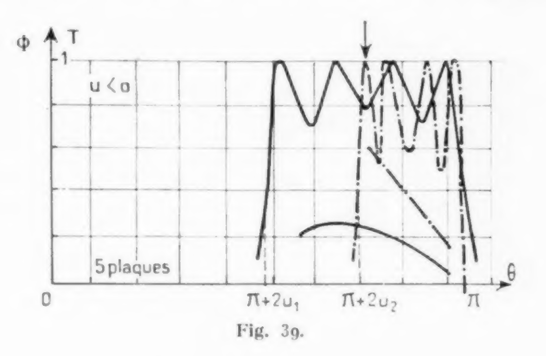


Fig. 39.

valeur de n différant de une ou deux unités de celle fournie par la formule approchée (50). Cette méthode d'approximations successives conduit très rapidement au résultat cherché. Enfin, pour passer de la fonction $u(x, y)$ au plan de perçage de la lentille, on utilisera un abaque reliant le diamètre D d'un trou à son paramètre caractéristique u pour le quadrillage adopté.

CONCLUSION.

Cette étude a abouti à l'énoncé de formules relativement simples, permettant l'analyse complète des principales caractéristiques électriques des réseaux.

On a vu que, moyennant certaines conditions facilement réalisables, ces réseaux peuvent être utilisés en incidence oblique jusqu'à des angles de 30° environ.

Ces performances permettent la réalisation de lentilles de grande ouverture et de conception entièrement nouvelle. Les formules obtenues ne faisant intervenir que des fonctions élémentaires, le calcul de ces lentilles ne soulève pas de difficultés mathématiques particulières.

De plus, un bref aperçu sur les analogies existant entre le diélectrique étudié et les diélectriques naturels de l'optique classique semble devoir conférer des bases physiques réelles à la méthode d'analyse utilisée.

L'auteur remercie M. J. C. Simon du constant intérêt avec lequel il a suivi cette étude et des conseils précieux qu'il lui a apportés. Il doit adresser des remerciements tout particuliers à M. V. Biggi

pour la communication de son intéressant Mémoire sur la transmission des réseaux en incidence normale ainsi qu'à M. G. Weill pour les nombreuses conversations qu'il a eues avec lui. Enfin, il ne saurait passer sous silence l'aide et l'appui que « l'Air Research and Development Command » a bien voulu apporter à ce travail.

ANNEXE.

Soit

$$r = P_1 M;$$

ρ, ψ et y les coordonnées cylindriques du point M (*fig.* 40). Posant

$$r_0^2 = x_0^2 + \rho^2 + y^2,$$

on a

$$\text{(A)} \qquad r = r_0\sqrt{1 - \frac{2x_0\rho}{r_0^2}\sin\psi} \simeq r_0\left(1 - \frac{x_0\rho}{r_0^2}\sin\psi\right).$$

Nous verrons plus loin la signification précise de cette approximation.

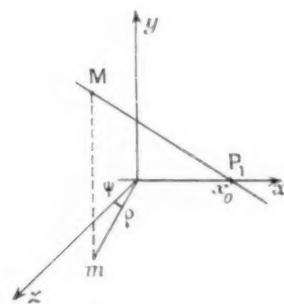


Fig. 40.

On a alors

$$\Psi = \Psi_0 \frac{e^{-ik\frac{x_0\rho}{r_0}\sin\psi}}{1 - \frac{x_0\rho}{r_0^2}\sin\psi},$$

avec

$$\Psi_0 = \frac{e^{ikr_0}}{r_0}.$$

Ψ_0 est donc une fonction de ρ et de y.

Dans le système de coordonnées cylindriques choisi, les composantes de $\overrightarrow{\text{grad}}\,\Psi$ s'écrivent

$$A_\rho = \frac{d\Psi}{d\rho}, \qquad A_\psi = \frac{1}{\rho}\frac{d\Psi}{d\psi}, \qquad A_y = \frac{d\Psi}{d_y}.$$

On trouve ainsi, dans le domaine d'approximation déjà défini,

$$\text{(B)} \quad \begin{cases} A_\rho = \Psi_0\left(\frac{1}{r_0} - ik\right)\frac{x_0\sin\psi - \rho}{r_0}\,e^{-ik\frac{x_0\rho}{r_0}\sin\psi}, \\ A_\psi = \Psi_0\left(\frac{1}{r_0} - ik\right)\frac{x_0\cos\psi}{r_0}\,e^{-ik\frac{x_0\rho}{r_0}\sin\psi}, \\ A_y = -\Psi_0\left(\frac{1}{r_0} - ik\right)\frac{y}{r_0}\,e^{-ik\frac{x_0\rho}{r_0}\sin\psi}. \end{cases}$$

On passe enfin aux coordonnées cartésiennes X, Y, Z par les formules

$$\text{(C)} \quad \begin{cases} X = A_\rho\sin\psi - A_\psi\cos\psi, \\ Y = A_y, \\ Z = A_\rho\cos\psi + A_\psi\sin\psi, \end{cases}$$

d'où l'on tire immédiatement les formules du système (27).

Domaine de validité des équations.

En écrivant l'équation (A) nous commettons une erreur qui est *de l'ordre* du premier terme négligé dans le développement en série de r, soit

$$\frac{1}{8}\left(2\frac{x_0\rho}{r_0^2}\sin\psi\right)^2.$$

Cette erreur sera inférieure à $\frac{1}{N}$ si le point M se trouve à l'extérieur de la sphère définie par l'équation :

$$\text{(D)} \qquad x^2 + y^2 + z^2 - x x_0\sqrt{\frac{N}{2}} + x_0^2 = 0.$$

Lorsque N varie, cette équation définit un réseau de sphères admettant les points P_1 et P_2 comme points

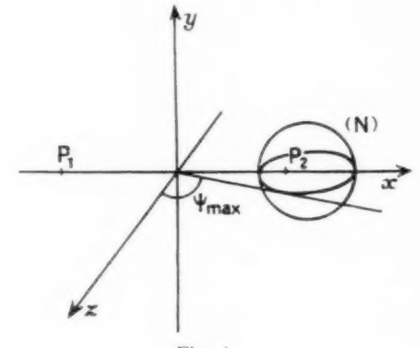


Fig. 41.

de Poncelet. L'angle ψ maximum définissant le domaine de validité des équations du système (B) est lié à N par la relation :

$$\sin\psi_{\max} < \sqrt{\frac{8}{N}}.$$

Pour $N = 20$, on trouve un angle $\psi_{\max}$ voisin de 40°.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] W. E. Kock, *Metallic Delay Lenses* (*Bell. Syst. Tech. J.*, n° 27, 1948).

[2] J. C. Simon, *Étude de la diffraction des écrans plans* (*Ann. Radioélectr.*, t. 6, n° 25, juill. 1951).

[3] A. F. Stevenson, *Solution of Electromagnetic Scattering Problems as Power Series in the Ratio (Dimension of Scatterer) Wavelength* (*J. Appl. Phys.*, t. 24, n° 9, sept. 1953).

[4] J. Ortusi, *Filtrage des ondes guidées* (*Bull. Soc. franç. Électr.*, t. 6, n° 63, nov. 1946).

[5] M. Parodi, *Application des polynomes électrosphériques à l'étude des systèmes oscillants à un grand nombre de degrés de liberté* (*Mém. Sc. Phys.*, fasc. 47).

[6] J. C. Simon et G. Broussaud, *Les filtres passe-bande en hyperfréquence* (*Ann. Radioélectr.*, t. 8, n° 31, janv. 1953).

[7] J. C. Simon et G. Weill, *Un nouveau type d'aérien à rayonnement longitudinal* (*Ann. Radioélectr.*, t. 8, n° 33, juill. 1953).

DÉFINITION, MESURE ET CARACTÈRES DES VITESSES DE PHASE DANS LES SYSTÈMES A STRUCTURE PÉRIODIQUE.

Par B. EPSZTEIN et G. MOURIER,

Département « Électronique » du Centre de Recherches Techniques
de la Compagnie Générale de T. S. F.

Sommaire. — *Les auteurs expliquent de façon élémentaire la présence d'harmoniques d'espace dans les circuits à structure périodique. Certains caractères généraux du phénomène sont exposés, dans la mesure où ils sont nécessaires pour comprendre les diverses méthodes de mesure des vitesses de phase. Ces méthodes sont ensuite expliquées et critiquées. Les résultats possibles, suivant le circuit étudié, sont ensuite analysés du point de vue de l'utilisation comme ligne à retard dans un tube à onde progressive amplificateur ou oscillateur* (*Carcinotron*) (¹). (C.D.U. : 621.385.029.6.)

Summary. — *The authors explain in a simple way the presence of space harmonics in circuits with periodic structures. Certain general characters of the phenomenon are described in so far as this is necessary to better understand the various methods of measuring phase velocity. These methods are then explained and criticised. The possible results, for the circuit studied, are then analysed from the point of view of their use as delay lines in a travelling wave tube used as an amplifier or as an oscillator* (*Carcinotron*) (¹). (U.D.C. : 621.385.029.6.)

INTRODUCTION.

La caractéristique d'une ligne à retard la plus importante pour l'application aux tubes à onde progressive est certainement la vitesse de phase et sa variation dans la bande passante. Il est connu depuis longtemps que les ondes guidées par ces circuits se présentent toujours comme la somme d'ondes sinusoïdales partielles de même fréquence ou « harmoniques d'espace » possédant chacun leur vitesse de phase propre. On se propose ici de donner une notion pratique de ce phénomène, d'exposer les méthodes de mesure de vitesse de phase, et de montrer comment les résultats de mesures doivent être étudiés en vue de l'utilisation de la ligne dans les tubes à onde progressive.

I. — LIGNES A STRUCTURE PÉRIODIQUE. PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES.

Une ligne à structure périodique est un ensemble de circuits ou cellules identiques couplés le long de la direction de propagation à intervalles régulier. Citons à titre d'exemple les guides à iris, les lignes à vannes et les circuits « rising sun », les lignes interdigitales, les hélices (*fig.* 1 et 2).

1.1. Déphasage unitaire et vitesse de groupe.

Dans un guide d'ondes, la carte des champs glisse *sans se déformer* le long des conducteurs à une vitesse qui est définie comme vitesse de phase. On ne peut pas conserver cette définition de la vitesse de phase dans le cas des lignes à structure périodique puisqu'elles ne sont plus cylindriques. Néanmoins, comme dans les filtres, chaque cellule introduit dans la bande passante le même retard de phase ψ.

On peut montrer que la vitesse de groupe, définie comme la vitesse d'un signal occupant une bande de fréquence infiniment étroite, est égale à

$$v_g = \frac{p}{\frac{d\psi}{d\omega}}, \tag{1}$$

p étant le pas du circuit, c'est-à-dire la longueur d'une cellule le long de la direction de propagation.

(¹) Marque déposée. — Registered trade-name.

Si le système ne rayonne pas et ne présente pas de pertes, on peut établir la relation différentielle :

$$P \, d\psi = W \, d\omega, \tag{2}$$

où P est la puissance qui s'écoule dans le système, et W l'énergie emmagasinée dans une cellule. Il est naturel de définir la vitesse d'énergie,

$$v_e = \frac{P}{\frac{W}{p}} \tag{3}$$

puisque $\frac{W}{p}$ est l'énergie emmagasinée en moyenne

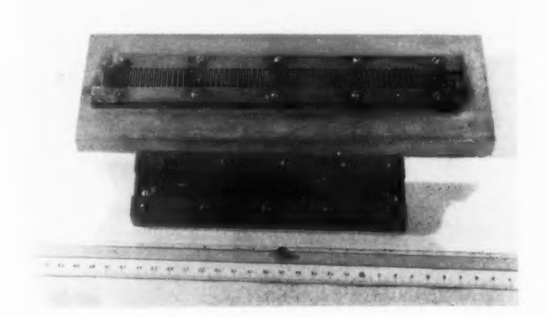


Fig. 1. — Deux exemples de lignes interdigitales.

par unité de longueur. Les relations (1), (2) et (3) montrent que la vitesse d'énergie est égale à la vitesse de groupe.



Fig. 2. — Ligne en échelle « rising sun ».

On voit que les vitesses de groupe et d'énergie peuvent être définies sans faire appel à la notion d'harmoniques d'espace.

1.2. Définition des vitesses de phase.

Considérons un circuit bien connu, le filtre passe-bas (*fig.* 3) : supposons que les condensateurs équidistants à distance p soient traversés par un faisceau électronique. On a le schéma élémentaire d'un tube à onde progressive.

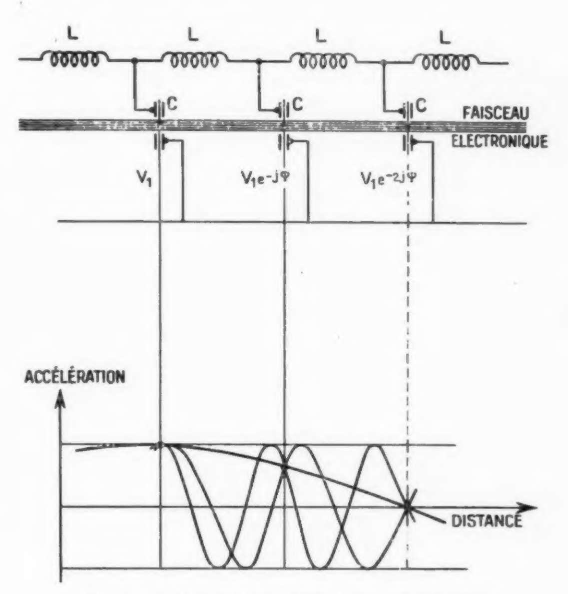


Fig. 3. — Schéma d'un tube à onde progressive possédant comme ligne à retard un filtre classique.

Appelons $\frac{\omega}{2\pi}$ la fréquence à laquelle le filtre est excité, et supposons cette fréquence située dans la bande passante, ψ étant l'angle de phase entre deux cellules successives, compris par définition entre $-\pi$ et π. Nous supposons que le générateur est à gauche et, l'énergie se propageant alors de la gauche vers la droite, nous prendrons ce sens comme sens positif pour toutes les vitesses $\left(\text{sur la figure } \psi \text{ est égal à } \frac{\pi}{4}\right)$.

Nous dirons qu'un électron est en phase avec le champ H. F. si chaque condensateur lui présente la même phase à son passage. Cette condition est remplie si la phase tourne de $\psi + 2\pi n$ pendant le transit entre deux condensateurs voisins :

$$\omega \frac{p}{v_n} = \psi + 2n\pi, \tag{4}$$

v_n étant la vitesse de l'électron et n un entier positif ou négatif quelconque, ou zéro.

Il existe donc une infinité de vitesses remplissant cette condition, les unes positives, les autres néga-

tives, comme dans les phénomènes de strosboscopie. Nous dirons que les v_n sont les vitesses de phase du système à la fréquence considérée. Si l'on connaît l'une d'entre elles et le pas, on peut calculer toutes les autres pour la même fréquence par la relation (4).

Le faisceau subit de la part des champs dans les condensateurs l'action la plus intense lorsque sa vitesse est égale à l'une des grandeurs v_n puisque c'est alors que les actions individuelles de tous les condensateurs s'ajoutent. Mais le résultat est quantativement différent suivant la valeur de l'indice n. Si l'on appelle a la distance entre les plaques d'un condensateur et θ_n l'angle de transit dans celui-ci, c'est-à-dire

$$\theta_n = \frac{\psi + 2\pi n}{p} a,$$

on peut prévoir que ce résultat sera proportionnel d'une part à un facteur $\frac{\sin \frac{\theta_n}{2}}{\frac{\theta_n}{2}}$ qui rend compte de la variation du champ pendant la traversée d'un électron (le même facteur intervient dans la théorie du klystron lorsque l'on tient compte du temps de transit dans un rhumbatron) et d'autre part à un facteur $\frac{a}{p}$, qui rend compte du temps pendant lequel l'électron est soumis au champ. Le premier facteur décroît lorsque n augmente, et l'on voit donc qu'un coefficient différent doit être attaché à l'amplitude du champ électrique suivant la valeur de v_n.

Pour obtenir une vue plus complète des phénomènes, oublions l'exemple de la figure 3 pour considérer une ligne à structure périodique quelconque. Une analyse rigoureuse conduit [1], [2] à écrire chaque composante de champ sous la forme suivante :

$$(5) \quad E(x, y, z)\,e^{j\omega t} = \sum_{-\infty}^{\infty} E_n(x, y)\,e^{j\omega t}\,e^{-j\frac{\psi + 2\pi n}{p} z}.$$

On voit maintenant que le champ total se présente comme la somme de composantes dont l'amplitude est donnée par $E_n(x, y)$ et se déplaçant à la vitesse de phase v_n donnée par (4), appelées « harmoniques d'espace ». Il est clair que ces ondes ne peuvent être excitées séparément. Ce ne sont donc pas des modes au sens de la théorie des guides d'ondes; au contraire elles sont *toutes* nécessairement excitées avec des amplitudes relatives *déterminées* par les conditions aux limites, c'est-à-dire par la configuration géométrique de la cellule élémentaire du circuit. Cette vue se confirme si l'on calcule la vitesse de groupe v_g, définie à partir de la vitesse de phase par

$$(6) \quad \frac{1}{v_g} = \frac{d}{d\omega}\left(\frac{\omega}{v_n}\right).$$

On aboutit au même résultat quel que soit l'harmonique d'espace considéré, c'est-à-dire à la relation (1). L'énergie électromagnétique doit donc être considérée comme transmise par l'ensemble des harmoniques d'espace, sans que l'on puisse la répartir entre eux.

Mais il est commode de définir l'un d'entre eux comme repère pour définir les autres, et l'on nomme fondamental celui pour lequel $n = 0$, ψ étant compris entre $-\pi$ et π.

1.3. Deux propriétés des harmoniques d'espace.

On trouvera dans la littérature de nombreuses études détaillées sur diverses structures [3], [4], [5], [6], [7] mais il semble nécessaire de dégager deux traits de grande importance pratique communs à presque tous les circuits en ce qui concerne l'intensité relative des harmoniques d'espace.

C'est un fait presque général que les champs électromagnétiques décroissent lorsqu'on s'éloigne des conducteurs qui les guident. Cette décroissance s'exprime dans les coefficients E_n de (5).

Si la forme de la ligne conduit à choisir les coordonnées rectangulaires, et si x traduit l'éloignement du point considéré au circuit, la fonction $E_n(x, y)$ se met sous la forme

$$(7) \quad E_n(x, y) = e_n(y)\,e^{-k_n x} + e'_n(y)\,e^{k_n x},$$

les fonctions e_n et e'_n variant en général lentement en fonction de y.

En coordonnées cylindriques, on aurait de même

$$(8') \quad E_n = A_n I_0(k_n r) + B_n K_0(k_n r)$$

ou

$$(8'') \quad E_n = A_n I_1(k_n r) + B_n K_1(k_n r)$$

I_0, I_1, K_0, K_1 étant les fonctions de Bessel modifiées.

On trouve que $|k_n|$ croît toujours lorsque $|n|$ augmente. Lorsque k_n est grand, ou plus précisément si $\left|\frac{c}{v_n}\right| \gg 1$, c'est-à-dire lorsque l'onde est fortement retardée, on a

$$(9) \quad k_n \simeq \frac{\omega}{v_n}.$$

Les k_n donnent une mesure de la décroissance spatiale des harmoniques d'espace en fonction de leur ordre. En effet, plus k_n est grand, plus le champ varie rapidement en fonction de x ou de r, plus l'harmonique « colle » à la ligne : on peut le consi-

dérer comme une petite perturbation provoquée par les arêtes vives des cellules. L'harmonique d'espace qui s'étend le plus loin du circuit est le fondamental.

On doit garder toujours présente à l'esprit la règle suivante : *une vitesse de phase élevée est en général associée à une variation transversale lente et inversement*, comme il résulte de (9).

Un autre caractère quasi-général des décompositions en harmoniques d'espace est le suivant : *l'amplitude de chacun à la surface des conducteurs est d'autant plus faible que son ordre est plus élevé.* Par exemple dans (7), on a en général [1] :

$$\ldots \quad |e_{\pm 4}(x)| < |e_{\pm 3}(x)| < |e_{\pm 2}(x)|, \quad \ldots$$

Ainsi *le fondamental est en général le plus intense.*

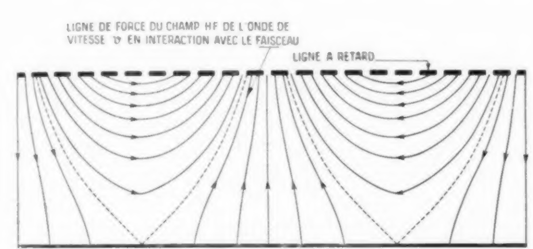


Fig. 4. — Ligne plane. Champ électrique d'un harmonique d'espace particulier entre la surface de la ligne et une plaque métallique parallèle.

La figure 4 est destinée à illustrer la variation dans l'espace d'un harmonique d'espace quelconque.

2. MÉTHODES DE MESURE.

On peut distinguer deux sortes de méthodes de mesure.

Une première méthode consiste à mesurer la répartition du champ de l'harmonique d'espace le plus intense. Les autres permettent de déterminer l'angle ψ. La connaissance d'une vitesse de phase ou de l'angle ψ permet de calculer toutes les autres vitesses de phase d'après (4).

2.1. Méthode de la sonde mobile.

Nous avons indiqué plus haut deux propriétés du fondamental : *il est le plus intense à la surface des conducteurs; il décroît moins vite que les autres harmoniques lorsque l'on s'éloigne du circuit.*

Ces propriétés conduisent à une détermination expérimentale des vitesses de phase : en déplaçant une sonde le long du circuit, mais à une distance suffisante pour que le fondamental soit beaucoup plus fort que les autres harmoniques, on peut mesurer des ondes stationnaires comme dans un guide d'onde. Il suffit de provoquer une réflexion fixe en un point de la ligne situé en arrière de la sonde. La longueur d'onde dans le circuit Λ conduit à la vitesse de phase par la relation élémentaire $\frac{c}{v_\varphi} = \frac{\lambda}{\Lambda}$.

La figure 5 donne le schéma du dispositif de mesure.

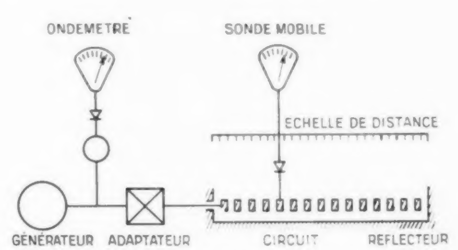


Fig. 5. — Schéma du dispositif de mesure de vitesse de phase par une sonde mobile.

La réflexion peut être facilement obtenue en plaçant dans une région de la ligne où le champ électrique est fort, un objet métallique, par exemple une petite lamelle élastique qui court-circuite deux cellules voisines.

La figure 6 donne une courbe typique du courant détecté en fonction de la position de la sonde. C'est une carte de champ partielle.

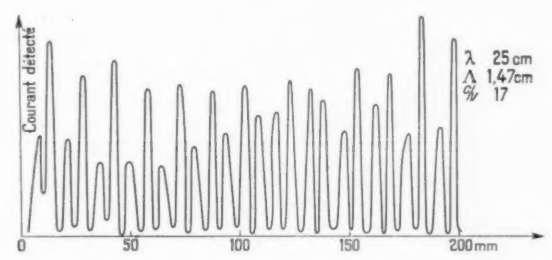


Fig. 6. — Variation typique du courant détecté par une sonde le long d'un circuit guidant des ondes stationnaires.

Les phénomènes suivants peuvent rendre la mesure plus délicate :

1° Un mode (au sens de la théorie des guides d'ondes) à vitesse de phase voisine de celle de la

---

[1] Il n'en est pas obligatoirement ainsi. On peut imaginer des formes compliquées de conducteurs, où ce ne serait pas le cas.

La même situation se présente lorsque l'on décompose un signal périodique en fréquences harmoniques, et avec les mêmes réserves.

lumière — dit « mode rapide » — vient très souvent se superposer à la propagation que l'on étudie. Le mode rapide varie très lentement lorsqu'on s'éloigne de la ligne, suivant la règle énoncée plus haut et, loin de celle-ci, il est dominant. Si c'est possible, on doit donc placer la sonde à une distance moyenne du circuit, de façon que le fondamental soit plus intense que les harmoniques d'espace et le mode rapide.

L'effet du mode rapide est illustré par les figures 7 et 8. S'il est très fort, il fait disparaître un maximum du champ sur deux. Les minima ne sont plus tous

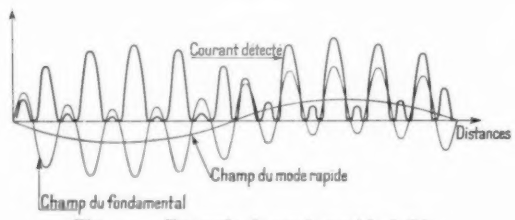


Fig. 7. — Exemple de mode rapide faible.

nuls. Le résultat serait différent si la réflexion à l'extrémité du circuit était imparfaite : dans ce dernier cas, on garderait des maxima égaux à chaque demi-longueur d'onde; seule, la sensibilité serait diminuée.

L'origine du « mode rapide » n'est pas toujours claire; il peut être un mode de ligne bifilaire entre le circuit et une autre pièce métallique isolée; il peut

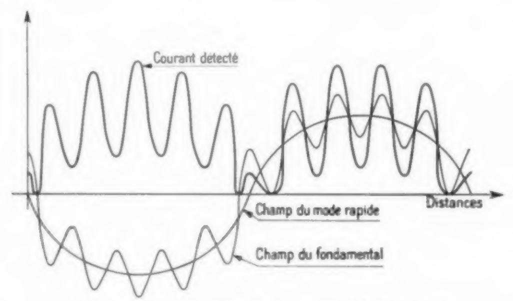


Fig. 8. — Exemple de mode rapide intense.

être provoqué par le réflecteur dont la forme doit en principe être adaptée à la carte de champs s'il ne doit pas rayonner suivant un autre mode; en outre il est certain que chaque irrégularité de structure dans le circuit rayonne.

2° De toute façon les harmoniques d'espace perturbent la répartition régulière des maxima et des minima du champ. Ils peuvent même masquer en certains points, le long de la ligne, la répartition de l'harmonique que l'on mesure.

3° Cette méthode de mesure ne s'applique pas directement lorsque $|\psi| \simeq \pi$; on a alors deux harmoniques d'espace de vitesse et donc d'amplitude très voisines et il est impossible de faire prédominer l'un d'eux en s'écartant du circuit. En effet, on a également

$$|\psi| - 2\pi \sim -\pi.$$

La répartition est de la forme

$$(10) \quad (A+B)\cos\frac{\pi+\varepsilon}{p}z + (A-B)\cos\frac{\pi-\varepsilon}{p}z$$
$$= 2A\cos\frac{\pi}{p}z\cos\frac{\varepsilon}{p}z - 2B\sin\frac{\pi}{p}z\sin\frac{\varepsilon}{p}z$$
$$\sim 2A\cos\frac{\pi}{p}z\cos\frac{\varepsilon}{p}z.$$

car $B \ll A$, étant donné que les deux harmoniques ont sensiblement même amplitude.

C'est un phénomène de battement, illustré par la figure 9. On a une variation sinusoïdale rapide dont la longueur d'onde est le double du pas : en

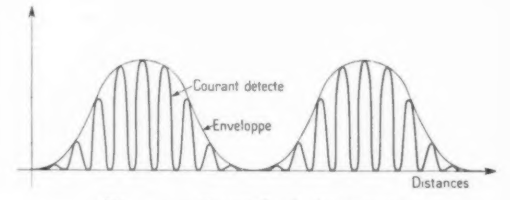


Fig. 9. — Exemple de battement.

face de chaque partie métallique se trouve un maximum du champ; la valeur des maxima varie comme le carré d'une sinusoïde de longueur L telle que

$$(11) \quad \frac{2\pi}{L} = \frac{\varepsilon}{p};$$

L, « longueur d'onde du battement » permet de trouver ψ et $\frac{c}{v_\varphi}$ pour le fondamental par les relations

$$(12) \quad \psi = \pi - \varepsilon, \qquad \psi = \frac{\omega}{v_\varphi}p$$

ou

$$(13) \quad \frac{c}{v_\varphi} = \frac{\lambda}{2p} - \frac{\lambda}{L}.$$

Comme toutes les méthodes en ondes stationnaires, celle-ci ne donne les vitesses de phase qu'en valeur absolue. Le signe est facile à déterminer dès qu'on

a des mesures sur deux fréquences voisines car $\frac{d\psi}{d\lambda} < 0$. Si $\frac{d|\psi|}{d\lambda} > 0$, on en déduit que $\psi < 0$.

La précision de la mesure est en principe d'autant plus grande que la longueur l_0 de la ligne est plus grande. Si l'on admet une incertitude d'une demi-longueur d'onde de l'harmonique qui sert à la mesure, l'erreur relative est $\frac{\Lambda}{2 l_0}$. Si la ligne n'est pas très régulière géométriquement, ou si le mode rapide est intense, la probabilité d'omettre des maxima ou des minima est en fait proportionnelle à la longueur de la ligne. Dans ce cas, une ligne relativement courte convient parfaitement à condition d'examiner très soigneusement la carte de champs obtenue; il est même parfois nécessaire de relever plusieurs cartes de champs à la même fréquence en faisant varier la longueur de la sonde et la distance de son extrémité au circuit. Encore subsiste-t-il parfois des incertitudes qui sont levées par comparaison à une deuxième mesure pour une fréquence voisine.

Cette méthode de mesure peut donc être délicate mais elle est très avantageuse justement parce qu'elle renseigne de manière très précise sur les irrégularités de la ligne, qu'elle permet souvent de localiser, et même sur l'amplitude relative des harmoniques d'espace.

2.2. Méthode du court-circuit mobile.

Au lieu de déplacer la sonde devant une réflexion fixe, on peut laisser la sonde fixe et déplacer l'abscisse de la réflexion. On a plutôt avantage à placer la sonde, non pas au voisinage de la ligne que l'on étudie, mais dans une ligne de mesure intercalée entre le générateur et la ligne à retard et adaptée à celle-ci.

On déplace alors un court-circuit de cellule en cellule et on mesure la variation de phase au niveau de la sonde, ou mieux, on déplace la sonde dans le même sens que le court-circuit, de façon à suivre un minimum du champ (*fig.* 10). Si a est le déplacement de la sonde correspondant à un déplacement du court-circuit d'une cellule, on a

$$\psi = 2\pi \frac{a}{\lambda}. \tag{14}$$

Il est nécessaire d'intercaler un transformateur accordable entre les deux lignes et de le régler pour adapter la ligne de mesure à la ligne à retard; pendant cette opération, la ligne à retard doit être le siège d'ondes purement progressives. L'adaptation obtenue n'est jamais parfaite et il en résulte de petites variations périodiques de a suivant la cellule où est le court-circuit. C'est la valeur moyenne de a qui donne ψ.

Cette méthode n'est pas basée sur la décomposition des champs en harmoniques d'espace. Comparée

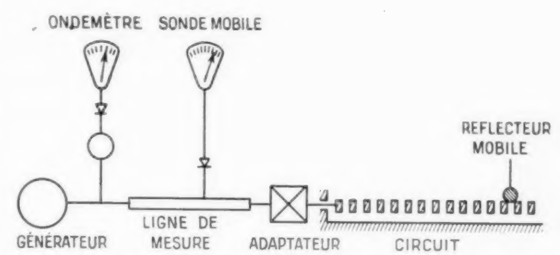


Fig. 10. — Schéma du dispositif de mesure par la méthode du court-circuit mobile.

à la précédente, elle sera donc plus simple, mais donnera peu de renseignements sur les champs de la ligne à retard.

La précision est, dans les cas favorables, beaucoup plus grande qu'avec la méthode précédente. Soit n le nombre total de cellules; admettons que les seules erreurs proviennent de la mesure de la position du premier et du dernier minimum, et soit Δl l'incertitude sur cette position; on a

$$\frac{\Delta\psi}{\psi} = \frac{2}{n}\,\frac{\Delta l}{a}. \tag{15}$$

Si le transformateur d'adaptation est parfait, l'erreur relative est faible parce que Δl est généralement beaucoup plus petit qu'une demi-longueur d'onde. Sinon, Δl est relié au taux d'ondes stationnaires et si l'adaptation n'est pas excellente, la mesure n'est pas plus précise que par la méthode de la sonde mobile. L'avantage sur la méthode précédente est de permettre les lectures le long d'une ligne de mesure et non de la ligne à retard. Toutefois la réalisation pratique d'un court-circuit mobile peut présenter des difficultés. Celui-ci doit relier les éléments homologues de deux cellules voisines et être placé de préférence dans une région où le champ électrique est fort.

Pour assurer des contacts sûrs, on peut être amené à exercer une certaine pression sur la ligne à retard et à la déformer.

Une autre solution consiste à plonger la ligne à retard dans une cuve à niveau variable remplie d'un liquide à forte constante diélectrique. La surface du liquide crée une réflexion importante. La tension superficielle du liquide doit être faible et la ligne très propre. De toute façon les phénomènes dus à la tension

superficielle deviennent très gênants lorsque le pas de la ligne est inférieur à 1 mm.

2.3. Méthode des résonances.

Une troisième méthode (*fig.* 11) consiste à provoquer une réflexion aux deux bouts du circuit en assurant un couplage lâche au générateur. On place une sonde couplée au circuit loin de l'attaque du générateur. On détermine les fréquences pour

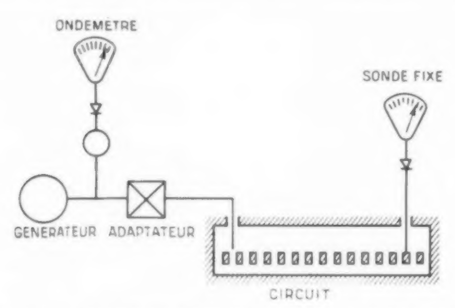


Fig. 11. — Schéma du dispositif de mesure par la méthode de la résonance.

lesquelles le courant détecté est maximum. On peut aussi placer une ligne de mesure entre le générateur et le transformateur de couplage, et mesurer l'impédance à l'entrée du transformateur en fonction de la fréquence. S'il y a n cellules entre les courts-circuits, on a une résonance chaque fois que

$$n\psi = k\pi. \tag{16}$$

Si l'on repère *toutes* les résonances, on connaît k, qui varie entre 0 et n. On connaît donc l'angle ψ et il suffit de repérer les fréquences de résonance pour chaque valeur de k. On obtient les vitesses de phase d'après (4).

L'inconvénient de cette méthode est le suivant : si le circuit possède peu de cellules, les résonances sont bien distinctes et l'on obtient des valeurs précises de la vitesse de phase mais seulement pour un petit nombre de fréquences assez espacées. Si l'on cherche à avoir un plus grand nombre de valeurs, il faut augmenter la longueur du circuit, mais les résonances deviennent très voisines et d'autant plus difficiles à déterminer que la surtension est souvent assez basse. Si l'on omet une seule résonance, on commet une grosse erreur sur toutes les mesures ultérieures.

2.4. Détermination des fréquences de coupure.

En principe, les méthodes de mesure précédentes permettent de trouver les fréquences de coupure. On a alors

$$\psi = 0, \qquad \Lambda = \infty \tag{17}$$

ou

$$\psi = \pi, \qquad \Lambda = 2p. \tag{18}$$

Néanmoins, au voisinage des fréquences de coupure, la dispersion est très grande et la propagation est extrêmement sensible aux irrégularités mécaniques : certaines cellules peuvent être exactement à la fréquence de coupure, tandis que d'autres sont de part et d'autre de celle-ci. Même pour un circuit très bien réglé, l'influence des pertes sur la dispersion est très grande au voisinage des fréquences de coupure. Enfin, l'adaptation au générateur, réglée pour la bande passante, est mauvaise dans cette région, et rayonne un mode rapide intense.

On doit souvent se contenter de délimiter une zone de coupure.

Une méthode commode consiste à adapter le circuit à une ligne de mesure dans la bande passante aussi près que possible de la fréquence de coupure. Si l'on fait varier la fréquence dans la direction de la fréquence de coupure, le taux d'ondes stationnaires sur la ligne de mesure augmente d'abord lentement, puis prend très rapidement de grandes valeurs (6 ou 10), lorsque l'on a passé la fréquence de coupure. Cette méthode a l'avantage d'être peu sensible à la présence du mode rapide.

3. LA DISPERSION.

Chaque mode — au sens habituel de modes indépendants différant par les configurations de champs, et dont la présence ou l'absence est liée aux conditions d'excitation du circuit — se propage, le long d'un circuit donné dans une certaine (éventuellement plusieurs) bande de fréquences. Nous étudierons maintenant comment le spectre des vitesses de phase se comporte dans la bande passante, d'après les résultats expérimentaux ou les calculs qui ont pu être effectués.

Entre les deux fréquences de coupure, l'angle de phase ψ varie entre 0 et π, suivant une fonction continue et monotone de la fréquence $\left(\frac{d\psi}{d\omega} > 0\right)$. Aux fréquences de coupure, $\frac{d\psi}{d\omega}$ est infini, la vitesse de groupe est donc nulle et la ligne ne transmet pas d'énergie.

En même temps la vitesse de phase varie entre l'infini et $\frac{\omega p}{\pi}$ suivant une fonction continue mais pas nécessairement monotone. La ligne peut pré-

senter la même vitesse de phase pour trois fréquences différentes dans la bande : la courbe $v_\varphi(\omega)$ présente alors une inflexion séparant un maximum et un minimum où la vitesse de phase est égale à la vitesse de groupe (*fig.* 12).

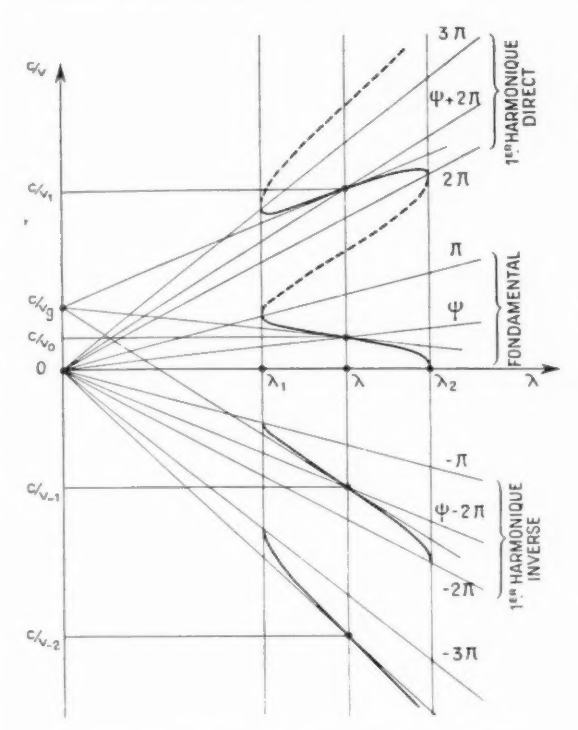


Fig. 12 *a*. — Diagramme de dispersion pour un circuit à dispersion directe.

La variation de ψ dans la bande passante peut s'effectuer de deux manières possibles : de la coupure basse à la coupure haute, ψ varie de 0 à π (exemple de la théorie des filtres classiques : le filtre passe-bas) ou de $-\pi$ à 0 (filtre classique passe-haut). Dans le premier cas, $\frac{d|\psi|}{d\lambda} < 0$, la dispersion est dite directe ou positive, la vitesse de phase du fondamental est de même signe que la vitesse de groupe; dans le second cas, $\frac{d|\psi|}{d\lambda} > 0$, la dispersion est dite inverse ou négative, la vitesse de phase du fondamental est de signe inverse à la vitesse de groupe.

Lorsque l'on désire introduire un circuit dans un tube, il faut d'abord déterminer la nature de la dispersion. En effet, si la dispersion est directe, le fondamental convient au mieux à un T. P. O. amplificateur et si au contraire elle est inverse, à un oscillateur du type « carcinotron ».

On peut en principe employer tout circuit à condition d'utiliser un harmonique présentant la dispersion convenable au tube désiré; pour une vitesse

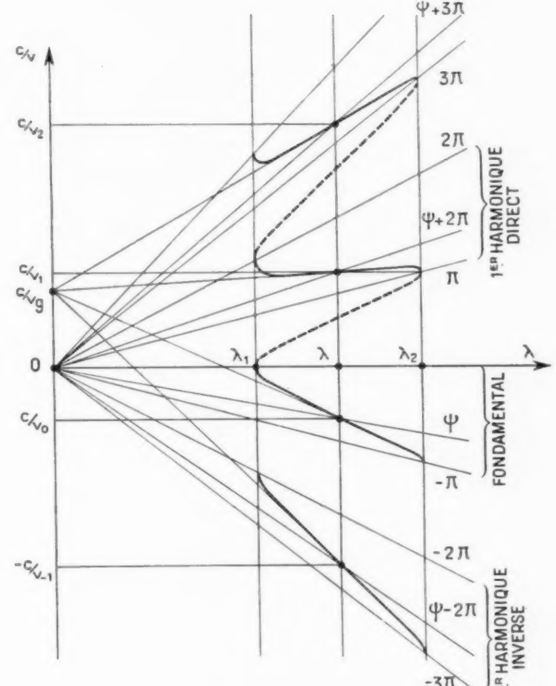


Fig. 12 *b*. — Diagrammes de dispersion pour un circuit à dispersion inverse.

de phase donnée, le pas est d'autant plus grand que l'ordre de l'harmonique est plus élevé [équ. (4)]; mais l'amplitude est d'autant plus faible. On se limite donc généralement au fondamental ou aux harmoniques d'ordre $+1$ ou -1.

Les figures 12 *a* et *b* donnent les vitesses de phase dans la bande pour les deux types de circuits. A chaque harmonique d'espace correspond une branche de la courbe. On a porté $\frac{c}{v}$ en fonction de λ, ce qui présente un certain nombre d'avantages pratiques :

— A chaque vitesse de phase (donc, dans le tube à chaque vitesse électronique, ou à chaque tension de fonctionnement) correspond une droite horizontale.

— la longueur d'onde est un paramètre plus commode que la fréquence pour le constructeur de

tubes U. H. F., car elle est reliée aux dimensions des circuits.

— La pente des droites joignant un point des courbes à l'origine est proportionnelle à l'angle de phase, car

$$\frac{\frac{c}{v_{\varphi n}}}{\lambda} = \frac{1}{2\pi p}(\psi + 2\pi n). \tag{19}$$

Cette équation montre également que les diverses branches de courbes coupent les droites verticales en des points équidistants.

— Les tangentes aux courbes coupent l'axe des $\frac{c}{v}$ à l'ordonné $\frac{c}{v_g}$. On peut en effet transformer (6) en

$$\frac{c}{v_g} = \frac{c}{v_\varphi} - \lambda \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{c}{v_\varphi}\right). \tag{20}$$

La figure 12 *a* est relative à un cas de dispersion directe : pour chaque harmonique d'espace, $\psi + 2\pi n$ décroît en fonction de λ, la vitesse de phase fondamentale est du signe de la vitesse de groupe. Le fondamental convient à un amplificateur ainsi d'ailleurs en principe que tous les harmoniques positifs. Les harmoniques négatifs conviennent à un oscillateur « carcinotron »; néanmoins leur amplitude est plus faible que celle du fondamental et l'on chercherait plutôt, pour cet usage, un circuit à dispersion inverse.

Dans cet exemple, bien que la dispersion soit directe comme dans un guide d'ondes, on peut remarquer que la vitesse de phase du premier harmonique direct croît avec la fréquence dans la partie centrale de la bande; il en est de même, en valeur absolue, pour tous les harmoniques inverses.

La figure 12 *b* se rapporte à un cas de dispersion inverse. $\psi + 2\pi n$ décroît encore, en valeur algébrique, en fonction de λ, mais, pour le fondamental, ψ est négatif. Le fondamental convient à un oscillateur « carcinotron », ainsi que tous les harmoniques négatifs. Le premier harmonique direct paraît approprié à un amplificateur à très large bande. Néanmoins, si sa vitesse de phase varie peu dans la bande, d'autres paramètres électriques, tels que l'impédance du circuit, varient beaucoup, et la bande passante du tube serait beaucoup plus petite que celle du circuit. En outre, on voit, en rabattant le demi-plan inférieur en pointillé sur le demi-plan supérieur, que les valeurs absolues de la vitesse de phase du fondamental au voisinage du mode π sont voisines de la vitesse de phase de l'harmonique d'espace direct : comme la condition de synchronisme entre l'onde et le faisceau n'est pas absolue, il en résulte, dans le cas particulier présent, le danger d'oscillations par interaction du faisceau avec le fondamental au voisinage du mode π, lorsque l'on essaie de faire fonctionner le tube en amplificateur sur le premier harmonique.

Les diagrammes de la figure 12 permettent de voir rapidement les régimes d'oscillation ou d'amplification qui peuvent exister dans le tube suivant la vitesse du faisceau électronique. Il est donc nécessaire de les tracer entièrement au moins pour les harmoniques d'espace les plus bas, et dans une bande assez large autour de la fréquence de fonctionnement. On doit même rechercher s'il n'existe pas une autre bande passante au delà de la coupure si celle-ci est proche de la fréquence de fonctionnement.

CONCLUSION.

Si la décomposition en harmoniques d'espace du champ électromagnétique dans une ligne à structure périodique a été introduite par les théoriciens, elle se rattache aux phénomènes plus familiers de stroboscopie. Expérimentalement, on met en évidence les plus intenses au cours de mesures qui donnent leur vitesse de phase. Les méthodes de mesure qui ne sont pas basées sur les harmoniques d'espace sont parfois plus simples, mais donnent des résultats moins complets sur l'amplitude relative des harmoniques d'espace, la régularité mécanique du circuit ou sur la courbe de dispersion elle-même.

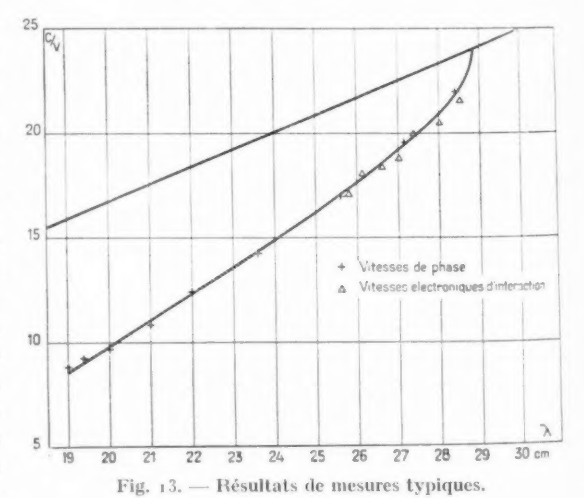


Fig. 13. — Résultats de mesures typiques.

Dans tous les cas, le plus gros obstacle à la détermination des vitesses de phase, et souvent d'ailleurs au bon fonctionnement des tubes, est la fragilité ou

l'irrégularité mécanique du circuit que l'on étudie.

Chaque tube fournit l'occasion de vérifier par une méthode électronique les résultats de la mesure « à froid » (*fig.* 13), puisque les conditions de fonctionnement permettent de connaître la vitesse du faisceau.

L'exemple de la figure 13 se rapporte à une ligne dont le pas était de 6 mm et la précision d'usinage d'environ $1/10^{e}$ de millimètre. Les mesures à froid sont confirmées par les mesures à chaud à 1 % près environ, accord qui peut être jugé comme largement satisfaisant pour la plupart des applications.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] P. Guénard, O. Doehler et R. Warnecke, *Sur les propriétés des lignes à structure périodique* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 235, 1952, p. 32).

[2] J. C. Slater, *Microwave Electronics* (Van Nostrand Cy, New-York).

[3] E. C. Chu et W. W. Hansen, *The Theory of Disk-Loaded Waveguides* (*J. Appl. Phys.*,, novembre 1947, p. 996).

[4] L. Brillouin, *Waveguides for Slow Waves* (*J. Appl. Phys.*, novembre 1948, p. 1023).

[5] R. C. Fletcher, *A Broad-Band Interdigital Circuit for use in traveling Wave-type Amplifiers* (*Proc. Inst. Rad. Eng.*, août 1952, p. 951).

[6] A. Leblond, *Étude d'une ligne interdigitale utilisée comme circuit anodique de magnétron oscillateur pour U. H. F.* (*Ann. Radioélect.*, t. 8, juillet 1953, p. 194 et t. 10, janvier 1955, p. 20).

[7] A. Leblond et G. Mourier, *Étude des lignes à barreaux à structure périodique* (*Ann. Radioélect.*, t. 9, avril 1954, p. 180 et octobre 1954, p. 311).

SUR LE POUVOIR SÉPARATEUR DU CONVERTISSEUR D'IMAGES A CHAMPS HOMOGÈNES ÉLECTROSTATIQUE ET MAGNÉTIQUE

Par G. WENDT,

Département « Électronique » du Centre de Recherches Techniques
de la Compagnie Générale de T.S.F.

Sommaire. — *L'auteur calcule la répartition de la densité électronique dans le point image en tenant compte de la distribution maxwellienne des vitesses initiales. Les résultats sont ensuite étendus à l'image d'une ligne, puis d'une mire composée de traits équidistants afin de permettre la comparaison avec des mesures expérimentales.*
Une « définition » de 100 traits/mm à partir d'une mire type télévision a été obtenue sur un écran de 50 mm de diamètre pour une tension anodique de 5 000 V seulement, ce qui est en bon accord avec la théorie. (C.D.U. : 621.385.832 : 621.397.6.)

Summary. — *The author calculates the electronic density distribution in the image point taking into account the Maxwellian distribution of the initial velocities. The results are then extended to the image of a line, and then to a pattern of equidistant lines in order to allow comparison with experimental measurements.*
A 100 lines per mm « definition » from television type pattern has been obtained on a 50 mm screen for an anode voltage of only 5 000 V, which will agree with the theory.
(U.D.C. : 621.385.832 : 621.397.6)

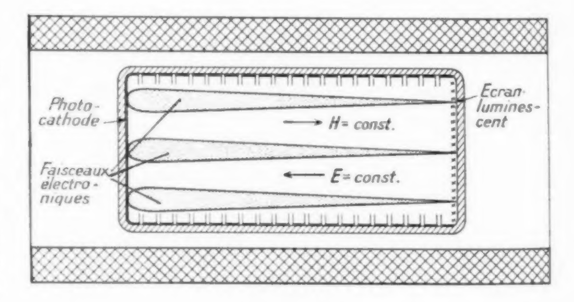
INTRODUCTION.

Le convertisseur d'images à champs électrostatique et magnétique homogènes et parallèles à l'axe du tube (*fig.* 1) est le plus simple à calculer de tous les convertisseurs fournissant une image réelle sur un écran fluorescent. A cause de la symétrie des champs, l'axe géométrique du tube ne se distingue pas, sur le plan de l'optique électronique, de n'importe quelle autre droite parallèle à cet axe. Tous les photoélectrons dont la vitesse initiale est perpendiculaire au plan de la photocathode parcourent des droites parallèles dans la direction des champs; ils sont accélérés par le champ électrique mais ne subissent aucune déviation de la part du champ magnétique parallèle à leur vecteur vitesse. Il en résulte :

1° Un grossissement 1:1 de l'image électronique par rapport à l'image lumineuse projetée sur la photocathode;

2° Une absence de distorsion pourvu que les champs soient vraiment homogènes;

3° Des aberrations identiques pour tous les points de l'image.



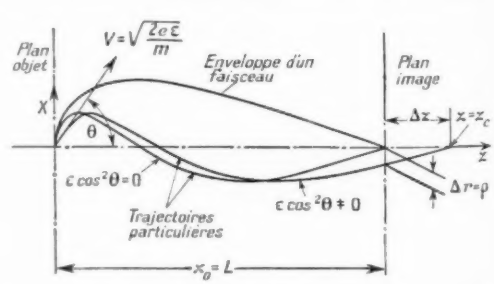


Fig. 1. — Convertisseur d'images à champs homogènes électrostatique et magnétique et formation des faisceaux élémentaires.

Chaque point jouissant des propriétés d'un point sur l'axe dans un système centré, seules les aberrations sphérique et chromatique existeront. En particulier, la courbure de champ, si gênante pour les autres types de convertisseurs n'apparaîtra pas ici.

Nous nous proposons, dans une première partie, d'évaluer d'abord approximativement le pouvoir séparateur limite, puis de déterminer plus rigoureusement, en tenant compte de la distribution des vitesses initiales, la répartition de la densité électronique à l'intérieur de l'image d'un point, d'une ligne et enfin d'une mire composée de lignes équidistantes d'égale épaisseur.

Dans une seconde partie, nous comparons ces résultats théoriques aux vérifications expérimentales récemment effectuées au Laboratoire Tubes à images de la Compagnie Générale de T.S.F.

1. CALCUL DU POUVOIR SÉPARATEUR.

1.1. Généralités.

Les calculs d'aberrations de sphéricité et de défauts chromatiques ont été développés dans de nombreux cas en Optique géométrique lumineuse et en Optique électronique. Aussi, pouvait-on espérer à première vue, trouver dans les publications des opticiens quelques résultats utilisables. Un examen plus approfondi de la question nous a montré qu'une étude spécifique du transport d'image magnétostatique était inévitable, en effet :

1° Nous devons ici calculer les aberrations (sphérique et chromatique) sans aucune approximation, tandis que les calculs de l'Optique géométrique se limitent normalement au troisième ordre et exceptionnellement au cinquième ordre.

2° Nous ne pouvons pas supposer une émission uniforme de la lumière suivant l'angle d'ouverture, puisque le faisceau est émis par la photocathode pour une vitesse initiale donnée, dans une hémisphère entière, suivant la loi de Lambert.

3° Nous nous imposons une distribution spectrale (énergies initiales des photoélectrons) de forme maxwellienne très différente de la répartition souvent uniforme considérée en Optique lumineuse pour chiffrer les effets des aberrations chromatiques.

Dans ces conditions, la recherche du pouvoir séparateur théorique optimum devient extrêmement complexe et ne peut être traitée que par de multiples intégrations graphiques nous donnant la répartition de la densité électronique suivant les différentes sections du faisceau par des plans parallèles à la photocathode. Comme le plan correspondant au pouvoir séparateur optimum se trouve proche du plan image pour les électrons de vitesse axiale nulle (sur la cathode), nous évaluerons la densité électronique dans ce plan que nous appellerons « plan de Gauss ». Il nous sera alors possible d'effectuer le calcul analytiquement et d'obtenir des valeurs suffisamment précises pour être comparées à l'expérience.

Ces résultats théoriques seront d'ailleurs légèrement pessimistes puisque le plan de meilleure résolution se trouve quelque part entre le plan de Gauss et le plan correspondant aux électrons de vitesse axiale maximum.

1.2. Calcul des trajectoires et diamètre du cercle limite.

Nous calculerons tout d'abord dans le plan de Gauss le diamètre du cercle à l'intérieur duquel passent tous les photoélectrons.

Pour cela, partons des équations bien connues du mouvement d'un électron dans un champ électromagnétique

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = e\left(\vec{E} + \left[\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{B}\right]\right), \qquad (1)$$

$e = -1{,}60.10^{-19}$ Cb représente la charge, $m = 9{,}11.10^{-31}$ kg la masse au repos d'un électron, t désigne le temps, $\vec{r}$ le rayon-vecteur à partir d'un point d'origine arbitraire, $\vec{E}$ l'intensité du champ électrique, $\vec{B}$ l'induction magnétique.

Introduisons un système de coordonnées tel que son axe des z coïncide avec l'axe du tube et que son origine tombe dans le plan de la photocathode (*fig.* 1). Les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ se réduisent à leurs composantes $E_z = E$ et $B_z = B$ et les équations (1) deviennent

$$\left\{\begin{aligned} m\ddot{x} &= e\dot{y}B,\\ m\ddot{y} &= -e\dot{x}B,\\ m\ddot{z} &= eE.\end{aligned}\right. \qquad (2)$$

La différentiation par rapport au temps t étant indiquée par des points.

De toutes les trajectoires possibles, il suffit d'examiner celles qui partent de l'origine dans le plan x-z, puisqu'on peut, à cause de la symétrie des champs, les faire coïncider avec les autres soit en les déplaçant, soit en les tournant autour de l'axe ou d'une droite parallèle à celui-ci.

La trajectoire d'un électron partant dans le plan x-z du point central de la photocathode avec la vitesse initiale v_0 sous un angle θ par rapport

à l'axe, est alors décrite par les expressions suivantes :

$$(3)\quad \begin{cases} x = \dfrac{v_0}{\omega}\sin\theta\sin\omega t, \\ y = \dfrac{v_0}{\omega}\sin\theta(1-\cos\omega t), \\ z = v_0 t\cos\theta + \dfrac{eE}{2m}t^2, \\ \omega = \dfrac{e}{m}B. \end{cases}$$

Après un temps

$$(4)\quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{eB},$$

l'électron revient sur l'axe indépendamment de la grandeur et de la direction de sa vitesse initiale et de la grandeur du champ électrique. En introduisant (4) dans la troisième équation (3), on obtient pour la distance entre ce point de croisement avec l'axe et le point de départ

$$(5)\quad z_c = v_0\cos\theta\frac{2\pi m}{eB} + \frac{2\pi^2 mE}{eB^2},$$

Définissons comme « plan image » dans l'approximation de Gauss le plan dans lequel se rencontrent les électrons à vitesse initiale de composante axiale ($v_0\cos\theta$) tendant vers zéro. Appelons z_0 sa distance à la photocathode.

$$(6)\quad z_0 = \frac{2\pi^2 mE}{eB^2}.$$

Le premier terme de (5) donnera alors l'aberration « longitudinale »

$$(7)\quad \Delta z = v_0\cos\theta\frac{2\pi m}{eB}.$$

Pour trouver l'aberration transversale, calculons l'inclinaison d'une trajectoire à son passage par le plan image. On obtient en différentiant (3) par rapport au temps t

$$(8)\quad \begin{cases} \dot x = v_0\sin\theta\cos\omega t, \\ \dot y = v_0\sin\theta\sin\omega t, \\ \dot z = v_0\cos\theta + \dfrac{eE}{m}t. \end{cases}$$

Le premier terme de la dernière équation est à négliger par rapport au deuxième pour $t \to T$. On aura donc

$$(9)\quad \left.\frac{dr}{dz}\right|_{t\to T} = \frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{dz} = \frac{\sqrt{\dot x^2+\dot y^2}}{\dot z} = \frac{mv_0\sin\theta}{eET} = \frac{v_0\sin\theta}{2\pi}\frac{B}{E}.$$

et l'on trouvera comme expression pour l'aberration transversale

$$(10)\quad \Delta r = \Delta z\frac{dr}{dz} = v_0^2\sin\theta\cos\theta\frac{m}{eE} = \frac{2\varepsilon}{E}\sin\theta\cos\theta = \frac{\varepsilon}{E}\sin 2\theta,$$

où $e\varepsilon = \frac{1}{2}mv_0^2$ est l'énergie cinétique initiale (en électrons-volts) de l'électron en question.

On obtient la valeur maximum de cette aberration, c'est-à-dire le rayon du cercle limite, lorsqu'on pose $\theta = 45^\circ$ et donne à l'énergie initiale ε sa valeur maximum ε_m, donnée par la relation d'Einstein :

$$(11)\quad e\varepsilon_m = h(\nu_{max} - \nu_0),$$

où h désigne la constante de Planck, ν_0 la fréquence de la limite dans le rouge, ν_{max} celle de la limite dans le violet de la réponse spectrale de la photocathode.

Le diamètre du cercle de rayon maximum sur l'écran du convertisseur, cercle apparaissant comme image électronique d'un point mathématique lumineux sur la photocathode, sera donc

$$(12)\quad \Delta = \frac{2\varepsilon_m}{E}.$$

Comme la densité du courant électronique à travers ce cercle n'a aucune raison d'être uniforme, nous allons essayer de calculer sa répartition.

1.3. Calcul de la répartition de la densité du courant dans l'image. Taux de modulation dans l'image d'une mire.

1.3.1. Source ponctuelle. — Pour pouvoir calculer la répartition de la densité du courant dans l'image sur l'écran du convertisseur, il est nécessaire de faire quelques hypothèses sur l'émission des photoélectrons, en particulier sur la distribution de leurs vitesses initiales. Selon J. H. de Boer [1], on peut admettre une distribution maxwellienne entre la vitesse nulle et la vitesse maximum déterminée par la loi d'Einstein (11) et une distribution de Lambert (loi du cosinus) pour les directions de ces vitesses. La vitesse initiale la plus probable pour une illumination par un spectre continu serait la moitié de la vitesse maximum (l'énergie la plus probable ε_0 vaut donc un quart de l'énergie maximum ε_m).

Avec ces hypothèses, le nombre d'électrons par seconde d'énergie initiale comprise entre ε et $\varepsilon + d\varepsilon$ émis par une petite aire df de la photocathode dans le cône creux défini par des angles au som-

met θ et $\theta + d\theta$ sera [2]

$$(13)\qquad dI = B\,\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\,e^{-\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}}\,d\,\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\cos\theta\sin\theta\,d\theta\,df$$

$$= -\frac{B}{4}\,\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\,e^{-\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}}\,d\,\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\,df\,d\cos 2\theta.$$

B est ici une constante proportionnelle à l'éclairement de la petite aire df (intensité de la lumière divisée par df) et $e\varepsilon_0$ l'énergie initiale la plus probable. L'énergie $e\varepsilon$ ne peut pas dépasser la valeur maximum $e\varepsilon_m$ définie par l'équation (11), la répartition est donc représentée dans la figure 2 par la

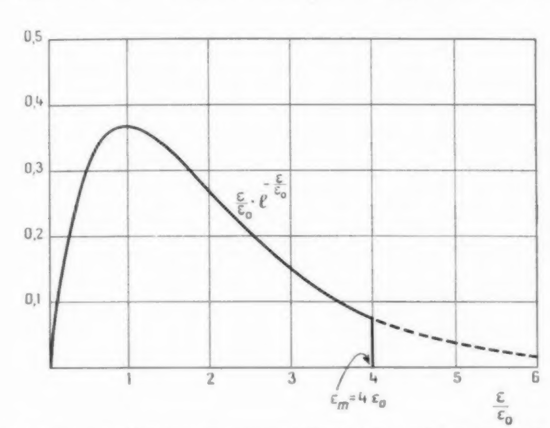


Fig. 2. — Distribution maxwellienne des énergies initiales des photoélectrons jusqu'à l'énergie maximum ε_m donnée par la loi d'Einstein (ε_0 l'énergie la plus probable).

ligne continue. La partie de la distribution maxwellienne au-delà de cette limite, dessinée en pointillé dans la figure, ne comporte que moins de 10 % du nombre total des électrons. Tenant compte du fait que ces électrons rapides tombent selon (10) bien loin du point image et ne contribuent ainsi que peu à la densité du courant, on admettra, pour faciliter le calcul, dans ce qui suit une distribution purement maxwellienne sans limite supérieure.

Exprimons maintenant la répartition des électrons sur la surface de l'écran en fonction des angles θ. Introduisons à cet effet dans le plan image la coordonnée polaire dont l'origine coïncide avec le point image gaussien. On obtient alors à partir de l'équation (10)

$$(14)\qquad \sin 2\theta = \frac{E\rho}{\varepsilon}\qquad (\text{avec } \Delta r = \rho).$$

Introduisons encore le rayon « numérique » du cercle de diffusion [éq. (12)]

$$(15)\qquad \rho_0 = \frac{\varepsilon_0}{E}\qquad \left(\rho_0 = \frac{\Delta}{8}\right)$$

et l'énergie « numérique » de sortie de photoélectrons

$$(16)\qquad \eta = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}.$$

Il résulte alors de (14)

$$\cos 2\theta = \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{\eta^2\rho_0^2}}$$

et

$$(17)\qquad d\cos 2\theta\,\Big|_{\eta=\text{cst}} = -\frac{1}{\eta\rho_0}\,\frac{\rho\,d\rho}{\sqrt{\eta^2\rho_0^2-\rho^2}},$$

de sorte que la répartition (13) devient

$$(18)\qquad dI = \frac{B}{4\rho_0}\,\frac{\rho\,d\rho}{\sqrt{\eta^2\rho_0^2-\rho^2}}\,e^{-\eta}\,d\eta\,df;$$

(18) donne le courant fourni par les électrons dont les énergies initiales sont comprises entre $e\varepsilon$ et $e(\varepsilon + d\varepsilon)$ et qui tombent sur des anneaux concentriques au point image compris entre les rayons ρ et $\rho + d\rho$. La densité du courant sur ces anneaux sera donc

$$(19)\qquad dj_\varepsilon = \frac{dI}{2\pi\rho\,d\rho} = \frac{B}{8\pi\rho_0}\,\frac{e^{-\eta}\,d\eta}{\sqrt{\eta^2\rho_0^2-\rho^2}}\,df.$$

Pour obtenir la densité réelle fournie par tous les électrons de toutes les énergies initiales, il reste à intégrer (19) par rapport à η. Mais il faut faire attention à ce qu'un rayon ρ ne peut être atteint que par des électrons ayant une énergie initiale supérieure à une valeur minimum $\varepsilon_{\min}$, tirée de (14) pour $\theta = 45°$

$$(20)\qquad \varepsilon_{\min} = \rho E\qquad \text{ou}\qquad \eta_{\min} = \frac{\rho}{\rho_0}.$$

On obtient ainsi comme distribution réelle

$$j = \frac{B\,df}{8\pi\rho_0}\int_{\frac{\rho}{\rho_0}}^{\infty}\frac{e^{-\eta}\,d\eta}{\sqrt{\eta^2\rho_0^2-\rho^2}}$$

ou après l'introduction d'une nouvelle variable $u = \frac{\eta\rho_0}{\rho}$ [3] :

$$(21)\qquad j = \frac{B\,df}{8\pi\rho_0^2}\int_1^{\infty}\frac{e^{-\frac{\rho u}{\rho_0}}\,du}{\sqrt{u^2-1}} = \frac{B\,df}{8\pi\rho_0^2}\,K_0\!\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right),$$

$K_0(x)$ désignant la fonction de Hankel « modifiée », liée à la notion normale $H_0^{(1)}(x)$ de cette fonction de la manière suivante :

$$K_0(x) = \frac{\pi}{2}\,i\,H_0^{(1)}(ix).$$

La distribution de la densité du courant dans l'image d'une aire df infiniment petite (point mathé-

matique) donnée par (21) est représentée sur la figure 3.

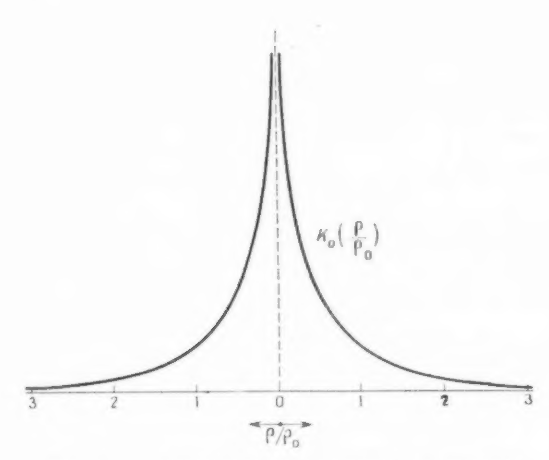


Fig. 3. — Répartition de la densité du courant dans l'image d'un point lumineux.

1.3.2. Source linéaire. — En réalité, l'image lumineuse sur la photocathode n'est pas constituée par des points ou des lignes mathématiques mais par des surfaces finies. Comme les tests utilisés pour les mesures de définition se composent normalement de réseaux des traits droits (mires), il est intéressant de calculer la répartition de la densité

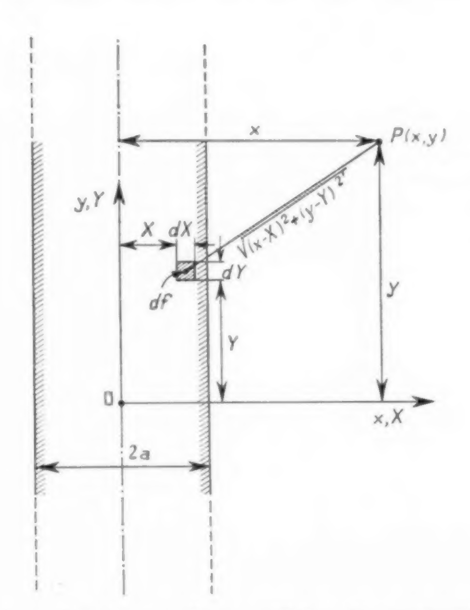


Fig. 4. — Les deux systèmes cartésiens des coordonnées

du courant à travers l'image d'une bande droite infiniment longue et d'une certaine largeur $2a$.

Pour effectuer ce calcul, introduisons des coordonnées cartésiennes (*fig.* 4) :

— x, y pour fixer le point arbitraire P pour lequel la densité du courant est recherchée;

— X, Y pour fixer l'endroit de l'une des aires df composant la bande lumineuse.

Les origines de deux systèmes de coordonnées coïncident et tombent sur un point arbitraire de la ligne médiane de la bande, supposée infiniment longue.

Une aire élémentaire df de coordonnées X, Y contribue selon (21) à la densité du courant dans le point x, y pour la fraction

$$(22)\quad dj = \frac{B\,dX\,dY}{2\pi\rho_0^2}K_0\left(\frac{\sqrt{(x-X)^2+(y-Y)^2}}{\rho_0}\right),$$

Recherchons d'abord la densité du courant dans la reproduction électronique d'une droite mathématique ($X = 0$) sur la photocathode en exécutant l'intégration de (22) selon Y entre les limites $-\infty$ et $+\infty$. Comme le résultat ne dépendra pas de y, on prend $y = 0$ et l'on obtient [3] :

$$(23)\quad j(x)\Big|_{a=0} = \frac{B\,\mathrm{d}X}{8\pi\rho_0^2}\int_{-\infty}^{+\infty}K_0\left(\frac{\sqrt{x^2+Y^2}}{\rho_0}\right)\mathrm{d}Y$$

$$= \frac{B\,\mathrm{d}X}{16\rho_0}\mathrm{e}^{-\frac{|x|}{\rho_0}}.$$

Le calcul de la répartition de la densité de courant dans l'image d'une bande de largeur $2a$ (finie), est un peu différent pour un point à l'extérieur et un point à l'intérieur de l'image gaussienne de la bande. Pour trouver la densité de courant dans un point extérieur à la bande, réintroduisons dans (23) ($x - X$) au lieu de x et recherchons la somme suivant (22)

$$(24)\quad j(x)\Big|_{x>a} = \frac{B}{16\rho_0}\int_{-a}^{+a}\mathrm{e}^{-\frac{|x-X|}{\rho_0}}\mathrm{d}X$$

$$= \frac{B}{16\rho_0}\int_{-a}^{+a}\mathrm{e}^{-\frac{x+X}{\rho_0}}\mathrm{d}X$$

$$= \frac{B}{16}\mathrm{e}^{-\frac{|x|}{\rho_0}}\left[\mathrm{e}^{\frac{a}{\rho_0}}-\mathrm{e}^{-\frac{a}{\rho_0}}\right] = \frac{B}{8}\mathrm{e}^{-\frac{|x|}{\rho_0}}\,\mathrm{sh}\,\frac{a}{\rho_0}.$$

Dans le calcul de la densité pour un point intérieur de la bande, il faut faire attention à ce que la valeur de la différence $x - X$ change de signe pendant l'intégration, tandis que la valeur absolue $x - X$

est prescrite par (23). On a donc

$$(25)\quad j(x)\Big|_{|x|<a} = \frac{B}{16\rho_0}\int_{-a}^{+a} e^{-\frac{|x-X|}{\rho_0}}\,dX$$
$$= \frac{B}{16\rho_0}\left[\int_{-a}^{x} e^{-\frac{x-X}{\rho_0}}\,dX + \int_{x}^{a} e^{+\frac{x-X}{\rho_0}}\,dX\right]$$
$$= \frac{B}{8}\left[1 - e^{-\frac{a}{\rho_0}}\operatorname{ch}\frac{x}{\rho_0}\right].$$

La répartition de la densité de courant à travers des bandes de différentes largeurs $2a$ [selon (24) et (25)] est représentée sur la figure 5. On voit que

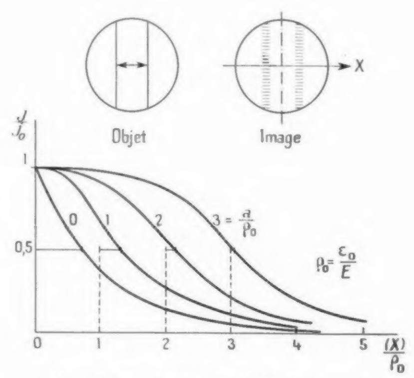
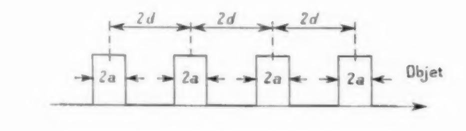


Fig. 5. — Répartition de la densité du courant à travers l'image électronique d'une bande lumineuse de $2a$ de largeur projeté sur la photocathode du convertisseur d'images.

la largeur de la distribution à mi-hauteur est moins différente de la largeur de l'image gaussienne pour des grandes largeurs $2a$ de la bande que pour des petites.

1.3.3. Mire formée de bandes équidistantes. — Comme les mesures de définition s'effectuent normalement avec des mires (réseaux) à traits



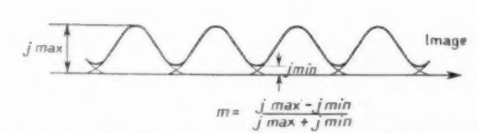


Fig. 6. — Définition du taux de modulation m de la densité du courant à travers une image électronique d'un réseau des traits lumineux (mire).

lumineux, calculons pour terminer la modulation de la densité du courant d'une image électronique d'un réseau des traits d'une période de $2d$ (*fig.* 6). Définissons comme taux de modulation

$$(26)\qquad m = \frac{j_{max} - j_{min}}{j_{max} + j_{min}},$$

j_{max} étant la valeur maximum dans la distribution de la densité, j_{min} la valeur minimum.

Ces valeurs sont données par les séries

$$(27)\qquad \begin{cases} j_{max} = j(0) + 2j(2d) + 2j(4d) + \dots \\ j_{min} = 2j(d) + 2j(3d) + 2j(5d) + \dots \end{cases}$$

En utilisant les équations (24), (25) et (26), on trouve

$$(28)\quad m = \frac{\left(1 - e^{-\frac{a}{\rho_0}}\right)\left(1 + e^{-\frac{2d-a}{\rho_0}}\right) - 2\operatorname{sh}\frac{a}{\rho_0}e^{-\frac{d}{\rho_0}}}{\left(1 - e^{-\frac{a}{\rho_0}}\right)\left(1 + e^{-\frac{2d-a}{\rho_0}}\right) + 2\operatorname{sh}\frac{a}{\rho_0}e^{-\frac{d}{\rho_0}}}.$$

Dans les mires utilisées habituellement en télévision et dont nous nous servirons dans les expériences : $d = 2a$.

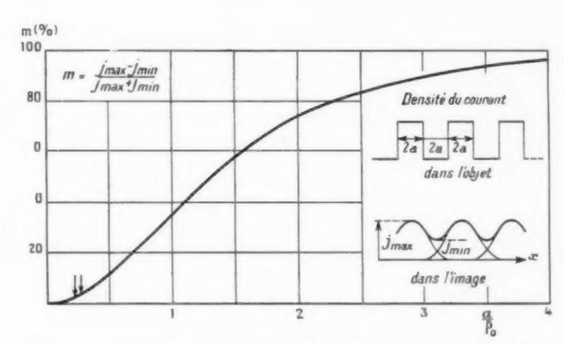


Fig. 7. — Taux de modulation de la répartition de la densité du courant à travers l'image électronique d'un réseau de traits lumineux (mire).

Dans ce cas, l'expression (28) se simplifie et devient

$$(29)\qquad m = \frac{\left(1 - e^{-\frac{a}{\rho_0}}\right)^2}{1 + e^{-\frac{2a}{\rho_0}}}.$$

Cette dernière fonction est représentée sur la figure 7. Pour des petits taux de modulation, c'est-à-dire pour des petites valeurs de $\frac{a}{\rho_0}$, (29) on tire de l'expression approchée très simple

$$(30)\qquad m = \frac{1}{2}\frac{a^2}{\rho_0^2}, \qquad \text{avec} \quad \rho_0 = \frac{\varepsilon_0}{E}.$$

2. VÉRIFICATION EXPÉRIMENTALE.

Le tube utilisé pour les mesures est représenté sur la figure 8. Sa forme cylindrique facilite la création d'un champ électrostatique homogène au moyen de quatre anneaux obtenus par métallisation de la paroi interne et portés à des potentiels convenables croissant de la photocathode à l'écran.

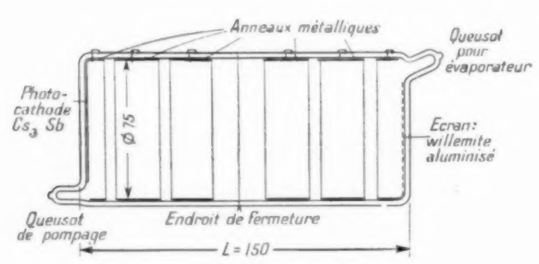


Fig. 8. — Tube utilisé pour les mesures.

Dans nos expériences, cette homogénéité du champ électrostatique s'est révélée suffisante pour les mesures de définition au centre de l'écran, mais pour assurer de plus une absence complète de distorsion jusqu'au bord de l'écran, un nombre plus grand d'anneaux serait à prévoir.

L'homogénéité du champ magnétique est assurée par trois grandes bobines (sans carcasse ferromagnétique) qui dépassent largement (de 6 cm) les deux extrémités du tube (*fig.* 9). Des mires utilisées

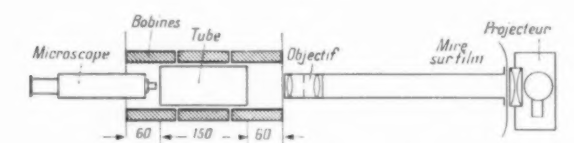


Fig. 9. — Appareillage de mesure.

normalement en télévision dans des essais de définition servent d'objet sur la photocathode (*fig.* 10). Elles sont photographiées sur film et projetées sur la photocathode par un petit projecteur (*fig.* 9). L'image est examinée au moyen d'un microscope.

La photocathode du type antimoine-césium reste sensible dans le domaine de 300 à 700 mμ. La valeur de l'énergie initiale maximum des photoélectrons est alors, selon (11), $\varepsilon_m = 2{,}3$ V et l'énergie la plus probable

$$\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon_m}{4} = 0{,}6\ \text{V}.$$

De ces valeurs, se déduit à partir de (12) le diamètre absolu du cercle limite

$$\Delta = \frac{2\varepsilon_m}{E} = \frac{2\varepsilon_m L}{U} = \frac{2.2{,}3.15}{U} = \frac{69}{U} \quad \text{cm}$$

et de (15) son « rayon numérique »

$$\rho_0 = \frac{\varepsilon_0}{E} = \frac{\varepsilon_0 L}{U} = \frac{9}{U} \quad \text{cm}$$

$L = 15$ cm étant la longueur du tube, U la haute tension totale en volts appliquée entre cathode et écran.

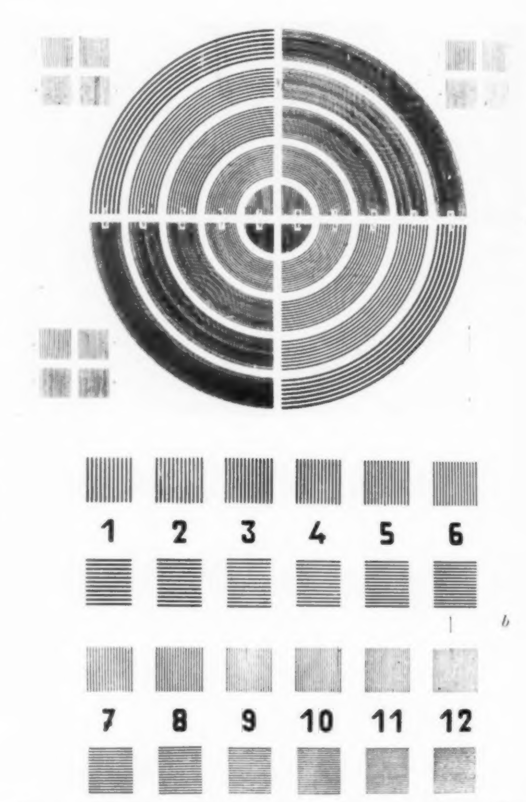


Fig. 10. — Mires de définition utilisées en télévision. Photographiées sur le film, elles étaient projetées par un petit projecteur sur la photocathode du tube.

Lorsqu'on suppose que la plus petite modulation encore discernable ne varie pas beaucoup avec la valeur de la luminosité, donc de la haute tension, on déduit de la figure 5, que le rapport $\frac{2a}{\rho_0}$ devrait rester à peu près le même pendant toutes les mesures et le calcul précédent montre que la largeur des traits juste discernables au microscope, devrait être inversement proportionnelle à la haute tension.

Ces largeurs ont été portées sur le graphique (*fig.* 11) en fonction de valeurs inverses de la haute tension. Une échelle complémentaire suivant les abscisses permet de connaître en même temps les valeurs de ρ_0. L'extrémité inférieure d'un segment de

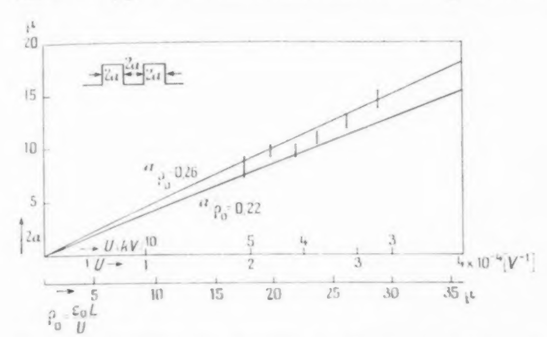


Fig. 11. — Résultat des mesures. La largeur du trait de la mire résolue en fonction de la tension appliquée au tube.

Ligne du bas : Limite de perception de la séparation de deux traits.

Ligne du haut : Perception assez confortable de la séparation des traits de la mire.

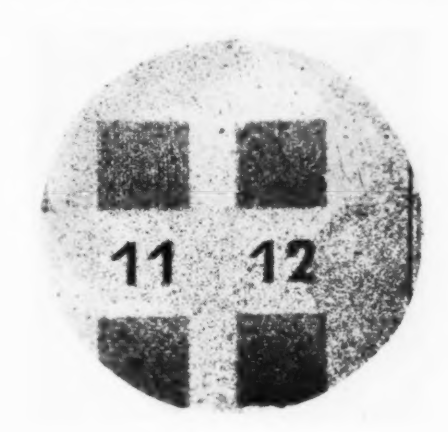
droite vertical caractérise la mire dont les traits sont confortablement discernables par l'œil de l'observateur et son extrémité inférieure la mire dont on distingue la structure périodique sans pouvoir nettement séparer les traits. La mire a de la figure 10, servait d'objet pour cette série des mesures. A la tension de 4 500 V, la mire partielle (N° 10) était encore résolue. Tenant compte de la difficulté des mesures au voisinage du seuil de la perception, les deux extrémités des traits représentatifs de la figure 11 tombent assez bien sur des droites passant par l'origine du graphique. Les inclinaisons de ces deux droites correspondent à deux valeurs du rapport $\frac{a}{\rho_0}$ (0,26 et 0,22) Ces valeurs sont marquées par des flèches dans la figure 7. On en tire les taux de modulation théoriques correspondants de 3,4 et 2,4 %.

Pour apprécier la validité de ces résultats, rappelons que le calcul du pouvoir séparateur limite dans le plan de Gauss (pour les électrons de vitesse nulle) nous donne une valeur légèrement pessimiste. Par ailleurs, les mesures expérimentales étaient gênées par le gain de la poudre (*fig.* 12) et les légères variations de la haute tension.

Comme le seuil de distinction de deux luminances différentes par l'œil humain est de l'ordre de 1 % pour des plages contiguës uniformément éclairées, condition non réalisée ici, nous pouvons considérer les résultats obtenus comme une bonne confirmation de la théorie.

CONCLUSIONS.

Nous avons trouvé dans ce qui précède que le convertisseur à champs électrostatique et magnétique homogènes, dont la longueur est L et la tension



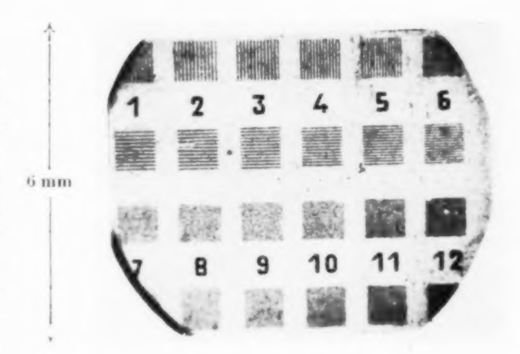


Fig. 12. — Microphotographie de l'image des mires sur l'écran du convertisseur.

appliquée U, permet d'obtenir une définition telle que deux traits de largeur $2a$ et distants de $2a$ sont juste séparables, $2a$ ayant pour valeur

$$2a = \frac{\varepsilon_0 L}{2U} = \frac{\varepsilon_m L}{8U} = \frac{\Delta}{16}, \qquad (31)$$

où ε_0 désigne l'énergie initiale des photoélectrons la plus probable, $\varepsilon_m = 4\varepsilon_0$ leur énergie maximum et Δ le diamètre du cercle limite dans le plan de Gauss calculé en 1.2. On voit que cette dernière valeur, quoique représentant le cercle de diamètre maximum accessible aux électrons, est plus d'un ordre de grandeur supérieure à la limite de définition trouvée dans les mesures pratiques.

Comme les dimensions utilisables de l'image ne sont limitées que par les parois du tube et non point

par l'accroissement des aberrations vers le bord de l'écran, on trouve comme définition en points sur son diamètre D la valeur

$$N = \frac{D}{2a} = \frac{2U}{\varepsilon_0}\,\frac{D}{L}.$$

Pour le tube expérimental décrit avec $U = 5\,000$ V, $= 0{,}6$ V; $D = 5$ cm; $L = 15$ cm, on obtiendrait

$$N = 5\,300 \text{ points/diamètre de l'écran.}$$

Une telle définition semble être intéressante pour un nombre assez grand d'applications.

Je tiens à remercier vivement M. Dufour et M. Rigot pour les précieux conseils qu'ils m'ont apportés et M. R. Guillery pour le grand soin qu'il a apporté au montage de l'appareillage et à l'exécution des mesures.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] J. H. de Boer, *Emission and absorption phenomena*, 1935.

[2] D. B. Langmuir, *Theoret. cal. Limitations of Cathode-ray tubes* (*Proc. Instn Radio Engrs.*, t. 25, 1937, p. 977).

[3] W. Magnus et F. Oberhettinger, *Formeln und Sätze für die speziellen Formeln der mathematischen Physik*, 1943.

ÉTUDE DU FONCTIONNEMENT D'UNE LIGNE INTERDIGITALE AU VOISINAGE DU MODE π.

PAR A. LEBLOND,

Département « Électronique » du Centre de Recherches Techniques
de la Compagnie Générale de T.S.F.

SOMMAIRE. — *Dans cet article l'auteur étudie le champ électromagnétique créé à grande distance par une ligne interdigitale fonctionnant au mode π. La ligne rayonne et le rayonnement est engendré par les composantes symétriques d'intensité le long des barreaux de la ligne, composantes, qui, au mode π, sont toutes en phase.*

L'étude permet le calcul du rapport de l'énergie rayonnée au mode π pendant une période d'oscillation à l'énergie moyenne emmagasinée dans la ligne.

Ce rapport n'est pas négligeable en général. Il reste néanmoins dans des limites permettant de traiter le problème par une méthode de perturbation.

La fréquence de coupure et la répartition des potentiels et des intensités calculées dans un article antérieur constituent donc une première approximation acceptable au voisinage du mode π. (U.D.C. : 621.385.029.6)

SUMMARY. — *In this paper the author discusses the electromagnetic field at a long distance of an interdigital line operating in the π mode. The line radiates and the radiation has its origin in the symmetric components of the intensities along the bars, all of these being in phase at the π mode.*

The study allows the computation of the ratio of the energy radiated at the π mode during a period of oscillation and the mean energy stored in the line.

The ratio is not negligeable in general. Nevertheless it is sufficient by low to treat the problem by a perturbation method.

The π mode frequency and the distribution of potentials and intensities as quoted in a preceeding article appears in fact to be even in this case a good first approximation. (U.D.C. : 621.385.029.6)

INTRODUCTION.

Dans l'étude qui suit on étudie le rayonnement d'une ligne interdigitale au mode π. L'existence d'un tel rayonnement est liée à la présence de composantes d'intensités le long des doigts, de répartition zéro (déphasage unitaire nul). On calcule à partir de l'expression des champs électrique et magnétique l'énergie rayonnée par la ligne pendant une période d'oscillation; la valeur est rapportée à celle de l'énergie emmagasinée, le rapport ainsi obtenu permettant de préciser l'effet perturbateur. Le calcul est conduit dans le cas d'une ligne illimitée en utilisant une méthode de perturbation à partir d'un état qui est celui que l'on détermine par la méthode des champs transversaux exposée en [1] et [2].

Dans un premier chapitre, on détermine les champs à grande distance créés par une ligne interdigitale au mode π.

Dans le second chapitre, on utilise les expressions des champs ainsi obtenus pour calculer l'énergie rayonnée pendant une période d'oscillation et l'on compare celle-ci à l'expression de l'énergie moyenne emmagasinée dans la ligne; la relation obtenue donnant la valeur du quotient de ces deux quantités permet l'étude de quelques cas particuliers.

En conclusion on voit que l'énergie rayonnée au mode π est loin d'être négligeable par rapport

à l'énergie emmagasinée dans la ligne. Sa valeur reste toutefois dans des limites compatibles avec l'utilisation d'une méthode de perburbation.

Les résultats obtenus en [1] et [2] constituent donc en fait une première approximation acceptable.

1. CALCULS DES CHAMPS CRÉÉS A GRANDE DISTANCE PAR UNE LIGNE INTERDIGITALE FONCTIONNANT AU MODE π.

1.1. Description du système rayonnant étudié.

La ligne étudiée est représentée schématiquement sur la figure 1.

Les barreaux sont fixés à un plan métallique supposé indéfini au moyen de pieds de fixations situés aux extrémités de chacun de ceux-ci, de façon alternée, réalisant la structure interdigitale classique.

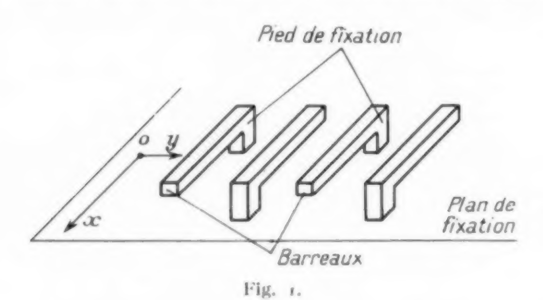


Fig. 1.

La répartition des potentiels et des intensités donnant naissance au rayonnement sera supposée être celle que l'on déduit de la théorie transversale exposée en [1] et [2]. On suppose que la valeur de l'énergie rayonnée pendant une période est faible devant celle de l'énergie moyenne emmagasinée. On verra que cette hypothèse est en général acceptable.

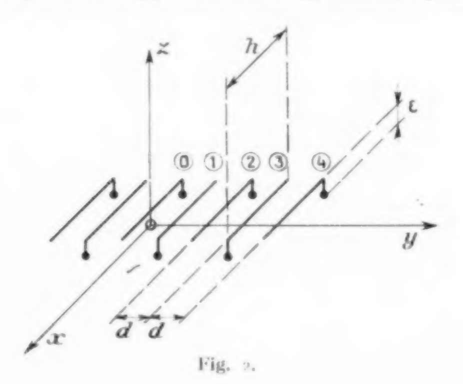


Fig. 2.

Sur la figure 2 on a dessiné une vue schématique de la ligne avec un numérotage arbitraire des doigts ainsi que le trièdre de référence choisi. Les cotes indiquées vont être expliquées en fin de paragraphe.

D'après les résultats obtenus dans les articles [1] et [2], les tensions et intensités le long des doigts sont données de façon générale par les relations

$$(1)\quad V = A\cos\Phi\, e^{-jp\psi} + B\sin\Phi\, e^{jp(\pi-\psi)},$$

$$(2)\quad I = -j\frac{1}{Z_c(\psi)}A\sin\Phi\, e^{-jp\psi} + j\frac{B}{Z_c(\pi-\psi)}\cos\Phi\, e^{jp(\pi-\psi)},$$

avec

$$\Phi = 2\pi\frac{x}{\lambda},$$

ψ, déphasage unitaire fondamental médian.

Les conditions aux limites de la figure sont :

— Doigts pairs :

$$(3)\qquad I = 0 \quad \text{pour} \quad \Phi = \frac{\Phi_0}{2} = \frac{\pi h}{\lambda},$$

$$(4)\qquad V = 0 \quad \text{pour} \quad \Phi = -\frac{\Phi_0}{2} = -\frac{\pi h}{\lambda};$$

— Doigts impairs :

$$(5)\qquad I = 0 \quad \text{pour} \quad \Phi = -\frac{\Phi_0}{2} = -\frac{\pi h}{\lambda},$$

$$(6)\qquad V = 0 \quad \text{pour} \quad \Phi = \frac{\Phi_0}{2} = \frac{\pi h}{\lambda}.$$

On en déduit les expressions de V et I

$$(7)\quad V = A\left[\cos\Phi\, e^{-jp\psi} + \operatorname{cotg}\frac{\Phi_0}{2}\sin\Phi\, e^{jp\overline{(\pi-\psi)}}\right],$$

$$(8)\quad I = j\frac{A}{Z_c(\psi)}\left[-\sin\Phi\, e^{-jp\psi} + \cos\Phi\operatorname{tg}\frac{\Phi_0}{2}\, e^{jp\overline{(\pi-\psi)}}\right].$$

Pour $\psi = \pi$, on voit que les intensités admettent une composante qu'on appellera i_1 de déphasage $(\pi - \psi) = 0$ et telle que

$$(9)\qquad i_1 = j\frac{A}{Z_c(\pi)}\cos\Phi\operatorname{tg}\frac{\Phi_0}{2}.$$

Il en est de même pour les pieds de fixation que l'on peut séparer en deux groupes, chaque groupe ayant tous ses courants en phase, ceux-ci étant dénommés i_2 et tels que

$$(10)\qquad i_2 = j\frac{2A}{Z_c(\pi)}\sin\frac{\Phi_0}{2}.$$

Ces éléments de déphasage fondamental zéro donnent naissance au rayonnement. A chacun des éléments rayonnants on fait correspondre un dipôle électrique que l'on supposera placé le long de l'axe de chaque barreau. La cote ε est la distance de l'axe du dipôle équivalent au plan métallique support de la ligne. d est le pas du système pris dans le plan médian ($\Phi = 0$).

On satisfait, d'autre part, automatiquement aux conditions aux limites sur ce plan en adjoignant à la ligne son image dans le plan métallique, on aboutit alors à la figure 3 qui représente l'ensemble des dipôles dont on étudie le rayonnement.

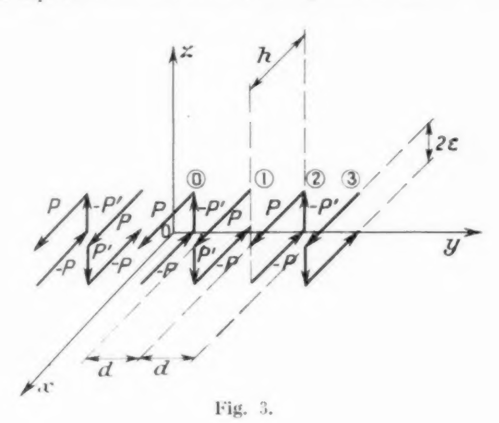


Fig. 3.

On distingue quatre groupes de dipôles P, $-P$, P' et $-P'$ dont les moments ont pour valeur P, P' reliés aux courants I_1 et I_2 par les relations

$$P = \frac{I_1 l_1}{j\omega}, \tag{11}$$

$$P' = \frac{I_2 l_2}{j\omega}, \tag{12}$$

avec

$$I_1 = \frac{jA}{Z_{c(\pi)}} \operatorname{tg} \frac{\Phi_0}{2}, \tag{13}$$

$$I_2 = j \frac{2A}{Z_{c(\pi)}} \sin \frac{\Phi_0}{2}, \tag{14}$$

l_1 et l_2 étant les longueurs effectives des barreaux d'une part et des pieds de fixation d'autre part calculées à partir de la relation

$$Il = \int i \, dz, \tag{15}$$

l'intégrale étant étendue à la longueur de l'élément rayonnant.

En fait la longueur d'onde λ étant toujours très supérieure à celle des barreaux h et à celle des pieds de fixation, ε. On a avec une très bonne approximation

$$I_1 = j \frac{A}{Z_c} \operatorname{tg} \frac{\Phi_0}{2}, \tag{16}$$

$$I_2 \sim j \frac{2A}{Z_c} \operatorname{tg} \frac{\Phi_0}{2} = 2 I_1; \tag{17}$$

$$l_1 = 2\varepsilon, \tag{18}$$

$$l_2 = h. \tag{19}$$

On se reportera dans la suite à la figure 3 dont on vient de définir les différents éléments P, P' h et 2ε.

1.2. **Expressions des champs à grande distance.**

1.2.1. CHAMPS $(\vec{E}, \vec{H})$ DUS A LA NAPPE DE DIPÔLES SUPÉRIEURE, NAPPE $+\varepsilon$. VALEUR $+P$. — Le point M où l'on calcule les champs a pour coordonnées x, y, z.

Les coordonnées des dipôles de la nappe supérieure sont

$$\left.\begin{aligned} x &= 0, \\ y &= md, \\ z &= +\varepsilon; \end{aligned}\right| \quad \begin{aligned} m = 0,\quad 1,\quad 2,\quad 3,\ \ldots,\ \infty, \\ -1,\ -2,\ -3,\ \ldots,\ -\infty. \end{aligned}$$

Pour une distance de M au dipôle étudié, très supérieure à la longueur d'onde λ, les champs sont donnés dans le système de Gauss par la relation

$$\vec{E} = k^2 \varphi\, \vec{u} \times (\vec{P} \times \vec{u}), \tag{20}$$

$$\vec{H} = k^2 \varphi (\vec{u} \times \vec{P}), \tag{21}$$

avec

$$\varphi = \frac{e^{-jkr}}{r}, \tag{22}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \tag{23}$$

P moment du dipôle.

$\vec{u}$ vecteur unitaire porté par la droite joignant le dipôle au point où l'on calcule le champ.

a. Étude du champ électrique $\vec{E}$. — On peut dresser le tableau suivant :

Vecteur.	Coordonnées Ox, Oy, Oz.		
$\vec{P}$	P	0	0
$\vec{u}$	α	β	γ
$\vec{P} \times \vec{u}$	0	$-P\gamma$	$P\beta$
$\vec{u} \times (\vec{P} \times \vec{u})$ ...	$P(\beta^2 + \gamma^2)$	$-P\alpha\beta$	$-P\alpha\gamma$

α, β, γ étant donnés par

$$\alpha = \frac{x}{\Delta}, \qquad \beta = \frac{y - md}{\Delta}, \qquad \gamma = \frac{z - \varepsilon}{\Delta} \tag{24}$$

et

$$\Delta = \sqrt{x^2 + (y - md)^2 + (z - \varepsilon)^2}. \tag{25}$$

Dès lors il vient pour les composantes du champ

électrique de la nappe $(+\varepsilon)$

$$(26)\quad E_x^{(+\varepsilon)} = Pk^2 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-jk\sqrt{x^2+(y-md)^2+(z-\varepsilon)^2}}}{\sqrt{x^2+(y-md)^2+(z-\varepsilon)^2}} \times \frac{(y-md)^2+(z-\varepsilon)^2}{x^2+(y-md)^2+(x-\varepsilon)^2},$$

$$(27)\quad E_y^{(+\varepsilon)} = -Pk^2 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-jk\sqrt{x^2+(y-md)^2+(z-\varepsilon)^2}}}{\sqrt{x^2+(y-md)^2+(z-\varepsilon)^2}} \times \frac{x(y-md)}{x^2+(y-md)^2+(z-\varepsilon)^2},$$

$$(28)\quad E_z^{(+\varepsilon)} = -Pk^2 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-jk\sqrt{x^2+(y-md)^2+(z-\varepsilon)^2}}}{\sqrt{x^2+(y-md)^2+(z-\varepsilon)^2}} \times \frac{x(z-\varepsilon)}{x^2+(y-md)^2+(z-\varepsilon)^2}.$$

Calcul de $E_x^{(+\varepsilon)}$. — Nous détaillerons le calcul de $E_x^{(+\varepsilon)}$, celui de toutes les autres composantes E ou H étant effectué de façon analogue.

$E_x^{(+\varepsilon)}$ est fonction paire de y de période d.

On pose

$$E_x^{(+\varepsilon)} = Pk^2\Phi(y).$$

On peut écrire, d'après Fourier,

$$(29)\quad \Phi(y) = b_0 + b_1\cos\left(2\pi\frac{y}{d}\right) + \ldots + b_p\cos\left(p2\pi\frac{y}{d}\right) + \ldots,$$

avec

$$(30)\quad b_0 = \frac{1}{d}\int_0^d \Phi(y)\,dy,$$

$$(31)\quad b_p = \frac{2}{d}\int_0^d \Phi(y)\cos\left(p2\pi\frac{y}{d}\right)dy \qquad (p \neq 0).$$

En posant d'abord

$$(32)\quad x = \rho\sin\theta,$$

$$(33)\quad z - \varepsilon = \rho\cos\theta$$

et ensuite

$$(34)\quad \frac{y}{d} - m = \frac{\rho}{d}u.$$

On montre que b_0 et b_p sont donnés par les équations

$$(35)\quad b_0 = \frac{2}{d}\left[\int_0^{+\infty}\frac{e^{-jk\rho\sqrt{1+u^2}}}{\sqrt{1+u^2}}du - \sin^2\theta\int_0^{+\infty}\frac{e^{-jk\rho\sqrt{1+u^2}}}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}du\right].$$

$$(36)\quad b_p = \frac{4}{d}\left[\int_0^{+\infty}\frac{e^{-jk\rho\sqrt{1+u^2}}}{\sqrt{1+u^2}}\cos\left(p2\pi\frac{\rho}{d}u\right)du - \sin^2\theta\int_0^{+\infty}\frac{e^{-jk\rho\sqrt{1+u^2}}}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\cos\left(p2\pi\frac{\rho}{d}u\right)du\right].$$

Calcul de $E_y^{(+\varepsilon)}$. — $E_y^{(+\varepsilon)}$ est fonction impaire de y de période d.

On pose

$$(37)\quad E_y^{(+\varepsilon)} = -Pk^2\left[a_1\sin\left(2\pi\frac{y}{d}\right) + \ldots + a_p\sin\left(p2\pi\frac{y}{d}\right) + \ldots\right],$$

avec

$$(38)\quad a_p = \frac{4\sin\theta}{d}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-jk\rho\sqrt{1+u^2}}}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}u\sin\left(p2\pi\frac{\rho}{d}u\right)du.$$

Calcul de $E_z^{(+\varepsilon)}$. — $E_z^{(+\varepsilon)}$ est fonction paire de y de période d.

On pose

$$(39)\quad E_z^{(+\varepsilon)} = -Pk^2\left[b'_0 + b'_1\cos\left(2\pi\frac{y}{d}\right) + \ldots + b'_p\cos\left(p2\pi\frac{y}{d}\right) + \ldots\right],$$

avec

$$(40)\quad b'_p = \frac{4\sin\theta\cos\theta}{d}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-jk\rho\sqrt{1+u^2}}}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\cos\left(p2\pi\frac{\rho}{d}u\right)du.$$

b. Étude du champ magnétique $\vec{H}$. — En partant de (21) on dresse le tableau suivant :

$\vec{u}$	α	β	γ
$\vec{P}$	P	0	0
$\vec{u}\times\vec{P}$	0	γP	$-P\beta$

Dès lors il vient pour les composantes du champ magnétique de la nappe $(+\varepsilon)$

$$(41)\quad H_x^{(+\varepsilon)} = 0,$$

$$(42)\quad H_y^{(+\varepsilon)} = Pk^2\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-jk\sqrt{x^2+(y-md)^2+(z-\varepsilon)^2}}}{\sqrt{x^2+(y-md)^2+(z-\varepsilon)^2}} \times \frac{z-\varepsilon}{\sqrt{x^2+(y-md)^2+(z-\varepsilon)^2}},$$

$$(43)\quad H_z^{(+\varepsilon)} = -Pk^2\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-jk\sqrt{x^2+(y-md)^2+(z-\varepsilon)^2}}}{\sqrt{x^2+(y-md)^2+(z-\varepsilon)^2}} \times \frac{y-md}{\sqrt{x^2+(y-md)^2+(z-\varepsilon)^2}}.$$

Calcul de $H_x^{(+\varepsilon)}$. — D'après (41),

$$(41)\quad H_x^{(+\varepsilon)} = 0.$$

Calcul de $H_y^{(+\varepsilon)}$. — $H_y^{(+\varepsilon)}$ est fonction paire de y de période d.

$$(44)\quad H_y^{(+\varepsilon)} = Pk^2\left[b_0 + b_1\cos\left(2\pi\frac{y}{d}\right) + \ldots + b_p\cos\left(p2\pi\frac{y}{d}\right) + \ldots\right],$$

avec

$$(45)\quad b_p = \frac{4\cos\theta}{d}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-jk\rho\sqrt{1+u^2}}}{1+u^2}\cos\left(p2\pi\frac{\rho}{d}u\right)du,$$

$$(46)\quad b_0 = \frac{2\cos\theta}{d}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-jk\rho\sqrt{1+u^2}}}{1+u^2}du.$$

Calcul de $H_z^{(+\varepsilon)}$. — $H_z^{(+\varepsilon)}$ est fonction impaire de y de période d.

$$H_z^{(+\varepsilon)} = -Pk^2\left[a_1 \sin\left(2\pi\frac{y}{d}\right) + \ldots + a_p \sin\left(p2\pi\frac{y}{d}\right) + \ldots\right], \tag{47}$$

avec

$$a_p = \frac{4}{d}\int_0^{\infty} \frac{e^{-jk\rho\sqrt{1+u^2}}}{1+u^2}\, u \sin\left(p2\pi\frac{\rho}{d}u\right) du. \tag{48}$$

Le calcul des champs est donc lié à celui des intégrales figurant dans les équations (35), (36), (38), (45), (46), (48).

On peut pour $k\rho \gg 1$ et $\mu\rho \gg 1$ obtenir des expressions asymptotiques de ces intégrales. La démonstration est donnée en Annexe. Les résultats sont les suivants :

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-jk\rho\sqrt{1+u^2}}}{\sqrt{1+u^2}}\, du \sim e^{-j\frac{\pi}{4}}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{e^{-jk\rho}}{\sqrt{k\rho}} \tag{49}$$

en posant

$$\mu = \left(p2\pi\frac{\rho}{d}\right),$$

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-jk\rho\sqrt{1+u^2}}}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\, du \simeq e^{-j\frac{\pi}{4}}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{e^{-jk\rho}}{\sqrt{k\rho}}, \tag{50}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-jk\rho\sqrt{1+u^2}}}{1+u^2}\, du \simeq e^{-j\frac{\pi}{4}}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{e^{-jk\rho}}{\sqrt{k\rho}}, \tag{51}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-jk\rho\sqrt{1+u^2}}}{\sqrt{1+u^2}}\cos(\mu\rho u)\, du \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{1}{(\mu^2-k^2)^{\frac{1}{4}}}\,\frac{e^{-\rho\sqrt{\mu^2-k^2}}}{\sqrt{\rho}}, \tag{52}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-jk\rho\sqrt{1+u^2}}}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\cos(\mu\rho u)\, du \sim -\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{(\mu^2-k^2)^{\frac{3}{4}}}{k^2}\,\frac{e^{-\rho\sqrt{\mu^2-k^2}}}{\sqrt{\rho}}, \tag{53}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-jk\rho\sqrt{1+u^2}}}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\, u\sin(\mu\rho u)\, du \simeq -\frac{\mu^2}{k^2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{(\mu^2-k^2)^{\frac{3}{4}}}{\sqrt{\mu}}\,\frac{e^{-\rho\sqrt{\mu^2-k^2}}}{\sqrt{\mu\rho}}, \tag{54}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-jk\rho\sqrt{1+u^2}}}{1+u^2}\cos(\mu\rho u)\, du \sim -j\frac{\mu}{k}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{(\mu^2-k^2)^{\frac{3}{4}}}{\sqrt{\mu}}\,\frac{e^{-\rho\sqrt{\mu^2-k^2}}}{\sqrt{\mu\rho}}. \tag{55}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-jk\rho\sqrt{1+u^2}}}{1+u^2}\, u\sin(\mu\rho u)\, du \simeq -j\frac{\mu}{k}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{1}{(\mu^2-k^2)^{\frac{1}{4}}}\,\frac{e^{-\rho\sqrt{\mu^2-k^2}}}{\sqrt{\rho}}. \tag{56}$$

Dans le cas traité, on a $d < \lambda$, donc $\mu > k$. Il en résulte que dans les développements de Fourier (29), (37), (39), (44) et (47) les seuls correspondant à une propagation sont ceux d'ordre zéro. Tous les autres sont liés à des composantes de champ atténuées exponentionnellement sans propagation.

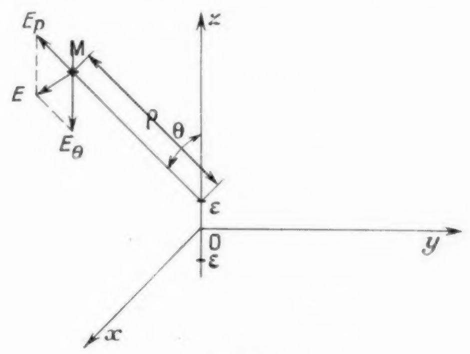


Fig. 4.

En reportant les égalités (49) à (56) dans les expressions des champs on arrive pour $k\rho \gg 1$ et $\mu\rho \gg 1$ aux expressions suivantes :

— Champ électrique :

$$E_x^{(+\varepsilon)} = \frac{Pk^2}{d}\sqrt{2\pi}\cos^2\theta\, e^{-j\frac{\pi}{4}}\,\frac{e^{-jk\rho}}{\sqrt{k\rho}}, \tag{57}$$

$$E_y^{(+\varepsilon)} = 0, \tag{58}$$

$$E_z^{(+\varepsilon)} = -\frac{Pk^2}{d}\sqrt{2\pi}\sin\theta\cos\theta\, e^{-j\frac{\pi}{4}}\,\frac{e^{-jk\rho}}{\sqrt{k\rho}}. \tag{59}$$

En introduisant suivant la figure 4 les composantes E_θ et E_r,

$$E_r = E_\rho = 0. \tag{60}$$

$$E_\theta^{(+\varepsilon)} = \frac{Pk^2}{d}\sqrt{2\pi}\, e^{-j\frac{\pi}{4}}\cos\theta\,\frac{e^{-jk\rho}}{\sqrt{k\rho}}. \tag{61}$$

— Champ magnétique :

$$H_x^{(+\varepsilon)} = 0. \tag{62}$$

$$H_y^{(+\varepsilon)} = \frac{Pk^2}{d}\sqrt{2\pi}\cos\theta\, e^{-j\frac{\pi}{4}}\,\frac{e^{-jk\rho}}{\sqrt{k\rho}}, \tag{63}$$

$$H_z^{(+\varepsilon)} = 0. \tag{64}$$

1.2.3. Champs $(\vec{E}, \vec{H})$ dus a la nappe de dipôles inférieure $(-\varepsilon)$ valeur $-P$. — Si l'on désigne par r la distance du point M à l'axe Oy on voit que pour $r \gg \varepsilon$

(65) $\rho = r - \varepsilon\cos\theta$ pour la nappe supérieure $(+\varepsilon)$.

(66) $\rho = r + \varepsilon\cos\theta$ pour la nappe inférieure $(-\varepsilon)$.

On en déduit les expressions des composantes correspondantes au moyen des équations (57) à (64).

1.2.3. CHAMP $\left(\vec{E}, \vec{H}\right)$ RÉSULTANT DUS AUX DIPÔLES $\vec{P}$ ET $-\vec{P}$. — Par sommation des expressions obtenues dans les deux paragraphes ci-dessus, on obtient

$$(67)\quad E_\theta^{(1)} = 2\frac{Pk^2}{d}\sqrt{2\pi}\,e^{+j\frac{\pi}{4}}\cos\theta\sin(kz\cos\theta)\frac{e^{-jkr}}{\sqrt{kr}},$$

$$(68)\quad H_\varphi^{1} = 2\frac{Pk^2}{d}\sqrt{2\pi}\,e^{+j\frac{\pi}{4}}\cos\theta\sin(kz\cos\theta)\frac{e^{-jkr}}{\sqrt{kr}} = E_\theta^{1}.$$

1.2.4. CHAMPS $\left(\vec{E}, \vec{H}\right)$ CRÉÉS PAR LES PIEDS DE FIXATION, DIPÔLES $\vec{P}'$ ET $-\vec{P}'$. — On remarque que la densité de ces dipôles est la moitié de celle des dipôles $\vec{P}$ et leur orientation se déduit de celle des dipôles P par une rotation égale à $+\frac{\pi}{2}$. Dès lors on obtient, à partir de (67) et (68),

$$(69)\quad E_\theta^{1} = 2\frac{P'k^2}{2d}\sqrt{2\pi}\,e^{+j\frac{\pi}{4}}\sin\theta\sin\left(k\frac{h}{2}\sin\theta\right)\frac{e^{-jkr}}{\sqrt{kr}},$$

$$(70)\quad H_\theta^{2} = 2\frac{P'k^2}{2d}\sqrt{2\pi}\,e^{+j\frac{\pi}{4}}\sin\theta\sin\left(k\frac{h}{2}\sin\theta\right)\frac{e^{-jkr}}{\sqrt{kr}} = E_\theta^{2}.$$

1.2.5. CHAMPS $\left(\vec{E}, \vec{H}\right)$ RÉSULTANT. — Le champ total admet pour composantes

$$(71)\quad E_\theta = \frac{2k^2}{d}\sqrt{2\pi}\,e^{+j\frac{\pi}{4}}\frac{e^{-jkr}}{\sqrt{kr}} \times\left[P\cos\theta\cos(kz\cos\theta) + \frac{P'}{2}\sin\theta\sin\left(k\frac{h}{2}\sin\theta\right)\right].$$

$$(72)\quad H_\varphi = \frac{2k^2}{d}\sqrt{2\pi}\,e^{+j\frac{\pi}{4}}\frac{e^{-jkr}}{\sqrt{kr}} \times\left[P\cos\theta\sin(kz\cos\theta) + \frac{P'}{2}\sin\theta\sin\left(k\frac{h}{2}\sin\theta\right)\right] = E_\theta.$$

2. PUISSANCE RAYONNÉE PAR LA LIGNE INTERDIGITALE ET ÉNERGIE EMMAGASINÉE PAR LA LIGNE.

2.1. Puissance rayonnée par la ligne interdigitale.

La puissance rayonnée par la ligne interdigitale est la moitié de celle qui est rayonnée dans tout l'espace par l'ensemble des dipôles considérés.

Dans le système de Gauss le vecteur radiant de Poynting a pour expression

$$(73)\quad R = \frac{c}{4\pi}\left(\vec{E}\wedge\vec{H}\right).$$

En régime sinusoïdal

$$(74)\quad |R| = \frac{1}{2}\frac{c}{4\pi}|E|.|H|.$$

Dès lors en partant des expressions (11) et (12) de P et P', il vient

$$(75)\quad |R| = \frac{2\pi}{c\,d^2\lambda}\left[I_1 l_1\cos\theta\sin(kz\cos\theta) + \frac{I_2 l_2}{2}\sin\theta\sin\left(k\frac{h}{2}\sin\theta\right)\right]^2.$$

La puissance rayonnée dans tout l'espace par unité de longueur de Oy est

$$(76)\quad P = \int_0^{2\pi} R\rho\,d\theta,$$

d'où

$$(77)\quad \int_0^{2\pi} R\rho\,d\theta = \frac{2\pi}{\lambda c\,d^2} \times\left[I_1^2 l_1^2 A + \frac{1}{4}I_2^2 l_2^2 B + I_1 I_2 l_1 l_2 C\right].$$

Avec pour A, B, C les expressions suivantes ainsi que leurs valeurs approchées pour $kz \ll 1$ et $k\frac{h}{2} \ll 1$, ce qui est en général réalisé

$$(78)\quad A = \int_0^{2\pi}\cos^2\theta\sin^2(kz\cos\theta)\,d\theta = \frac{\pi}{2}\left[1 + \frac{J_1(2kz)}{kz}\right] - \pi J_0(2kz) \sim \frac{3\pi}{4}(kz)^2,$$

$$(79)\quad B = \int_0^{2\pi}\sin^2\theta\sin^2\left(k\frac{h}{2}\sin\theta\right)d\theta = \frac{\pi}{2}\left[1 - J_0(kh) + J_2(kh)\right] \sim \frac{3\pi}{4}\left(\frac{kh}{2}\right)^2,$$

$$(80)\quad C = \int_0^{2\pi}\sin(kz\cos\theta)\sin\left(k\frac{h}{2}\sin\theta\right)\sin\theta\cos\theta\,d\theta = 2\pi\frac{kz\frac{kh}{2}}{\frac{k^2h^2}{4} + k^2z^2}J_2\left(\sqrt{k^2z^2 + \frac{k^2h^2}{4}}\right) \sim \frac{\pi}{2}(kz)\left(\frac{kh}{4}\right).$$

Les fonctions J_k sont les fonctions de Bessel d'ordre k.

On en déduit la puissance rayonnée par la ligne interdigitale dans l'espace situé au-dessus du plan métallique, $z > 0$, et pour la longueur d de l'axe Oy

$$(81)\quad Pr = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} R\rho\,d\theta.$$

$$(82)\quad P = 90\pi^3\left(\frac{d}{\lambda}\right)\left[I_1^2\left(\frac{l_1}{\lambda}\right)^2\left(\frac{z}{d}\right)^2 + I_2^2\left(\frac{l_2}{\lambda}\right)^2\left(\frac{h}{2d}\right)^2 + \frac{I_1I_2}{3}\left(\frac{l_1}{\lambda}\right)\left(\frac{l_2}{\lambda}\right)\left(\frac{z}{d}\right)\left(\frac{h}{2d}\right)\right],$$

P, en watts; I en ampères.

Compte tenu de ce que

$$l_2 = 2 l_1, \tag{17}$$

$$l_1 = h, \tag{18}$$

$$l_2 = 2\varepsilon. \tag{19}$$

On aboutit facilement à l'expression

$$\mathcal{P} = 500\pi^4 I_1^2 \left(\frac{h}{\lambda}\frac{\varepsilon}{d}\right)^2 \frac{d}{\lambda}, \tag{83}$$

$\mathcal{P}$ étant exprimé en watts, I_1 étant exprimé en ampères et tel que

$$|I_1| = \frac{1}{Z_c} \operatorname{tg} \frac{\Phi_0}{2}.$$

I_1 est la valeur maxima ($\Phi = 0$) de la composante symétrique de courant de déphasage fondamental zéro.

2.2. Énergie emmagasinée par la ligne interdigitale.

Soit w_t la valeur moyenne de cette énergie pour un barreau on a

$$w_t = w_E + w_H = 2 w_E = 2 w_H. \tag{84}$$

w_E et w_H étant respectivement les énergies moyennes emmagasinées électrique et magnétique, on peut écrire

$$w_E = \frac{1}{4} q_n^* V_n, \tag{85}$$

avec

$$q_n = \sum_m \gamma_{mn} V_m. \tag{86}$$

Pour le calcul de w_E et de q_n on utilise les expressions des potentiels écrites au chapitre 2, paragraphe 1. On est conduit au résultat

$$w_t = \frac{2.10^{-8}}{3k} \frac{Z_c I_1^2}{\Phi_0}. \tag{87}$$

Les unités étant :

w_t, en watts ;
Z_c, en ohms;
I_1, en ampères,
k, en mètres [1],

Z_c est l'impédance caractéristique du mode π qui peut être calculée au moyen des relations données en [1] et [2].

On compare cette énergie à l'énergie rayonnée par la ligne pendant une période. Celle-ci a pour valeur w_R

$$w_R = PT = 500\pi^4 I_1^2 \left(\frac{h\varepsilon}{\lambda d}\right)^2 \left(\frac{d}{\lambda}\right) \frac{\lambda}{3.10^8} \tag{88}$$

et

$$w_t = \frac{10^{-8}}{3\pi} \frac{1}{\Phi_0} Z_c I_1^2 \lambda, \tag{89}$$

d'où

$$\frac{\overline{w}_R}{w_t} = 1000\pi^6 \left(\frac{h}{\lambda}\right)^4 \left(\frac{\varepsilon}{d}\right)^2 \left(\frac{d}{h}\right) \frac{1}{Z_c}, \tag{90}$$

Z_c étant exprimé en ohms.

On peut chercher la valeur de ce quotient dans le cas de la ligne interdigitale de la figure 12 de la publication [2].

Elle n'est pas tout à fait conforme au modèle des figures 1, 2 et 3. Néanmoins on utilisera la relation (90) pour obtenir l'ordre de grandeur des pertes par rayonnement.

On a, en centimètres et en ohms,

$$h = 5{,}2,$$
$$\lambda_\pi = 33$$

(valeur lue après extrapolation de la courbe),

$$d = 0{,}6,$$
$$\varepsilon = 0{,}1 + 0{,}2 = 0{,}3,$$
$$Z_c = 31{,}4.$$

Dès lors

$$\frac{w_R}{w_t} = 0{,}27.$$

L'énergie rayonnée au mode π pendant une période de l'oscillation est de l'ordre du quart de celle qui est emmagasinée. En reprenant ce calcul pour d'autres types de lignes on trouverait des chiffres analogues voisins de 0,2. L'hypothèse de petites perturbations qui est la base du calcul reste donc acceptable. Néanmoins les pertes ne sont pas négligeables comme on aurait pu le croire à première vue.

CONCLUSION.

L'ensemble de l'étude précédente à permis d'aboutir à la relation (90) qui permet de préciser l'effet perturbateur dû au rayonnement de la ligne au mode π. On voit qu'il reste en général assez faible pour que les tensions et les intensités fournies par les équations (1) et (2) puissent être considérées comme une bonne première approximation, le rapport $\frac{w_R}{w_t}$ restant compris entre 0,2 et 0,3, pour les lignes utilisées dans les tubes à propagation d'onde.

ANNEXE.

Dans cette annexe on donne une méthode générale permettant d'obtenir l'ensemble des équivalences (49) à (56).

L'intégrale définie (49) s'exprime au moyen des fonctions de Bessel $J_0(k\rho)$ et $Y_0(k\rho)$.

La forme asymptotique indiquée en résulte. L'équivalence (50) s'établit au moyen d'une intégration par parties.

L'équivalence (51) découle de (49) et (50)

En ce qui concerne les équivalences (52) à (56) on prend pour base d'étude l'intégrale définie (52), soit

$$(52) \qquad I = \int_0^{\infty} \frac{e^{-jk\rho\sqrt{1+u^2}}}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}} \cos\mu\rho u \, du.$$

En posant $t = \sqrt{1+u^2}$, on peut écrire

$$(91) \qquad I = \int_1^{\infty} e^{-jk\rho t} \frac{\cos\mu\rho\sqrt{t^2-1}}{\sqrt{t^2-1}} dt.$$

Nous ferons l'étude de I en la prenant sous cette forme.

On considère d'abord I comme fonction de ρ et l'on recherche l'équation différentielle satisfaite par $I(\rho)$ pour $k\rho$ et $\mu\rho \gg 1$.

Pour pouvoir dériver $I(\rho)$, il nous faut partir d'intégrales définies qui restent convergentes après dérivation sous le signe d'intégration. Pour cela on intègre par partie (91) et l'on voit s'introduire un certain nombre d'intégrales intermédiaires, qui sont celles figurant au premier membre des équivalences (52) à (56). Ces intégrales s'expriment en fonction de I et de ses dérivées. On voit donc que la méthode employée permettra le calcul de l'ensemble des intégrales (52) à (56).

Vu la nature des fonctions intervenant sous le signe d'intégration, il faut aller jusqu'à la dérivée seconde de I.

L'équation différentielle obtenue est alors

$$(92) \qquad I'' + \frac{I'}{\mu\rho} - \left(1 - \frac{\mu^2}{k^2}\right) I = 0,$$

les dérivées étant prises par rapport à $\mu\rho$.

La solution pour $\mu\rho \gg 1$ est

$$(93) \qquad I = A\left(\frac{k}{\mu}\right) \frac{e^{-\mu\rho\sqrt{1-\frac{k^2}{\mu^2}}}}{\sqrt{\mu\rho}},$$

$A\left(\frac{k}{\mu}\right)$ étant une fonction à première vue inconnue de $\frac{k}{\mu}$.

Pour la déterminer on procède pour $A\left(\frac{k}{\mu}\right)$ comme on vient de procéder pour I, mais en tenant compte de l'expression particulière de I en fonction de $\mu\rho$. On voit d'abord que $A\left(\frac{k}{\mu}\right)$ satisfait à

$$(94) \qquad (1-u^2)A' = \frac{1}{2} A u, \qquad \text{avec} \quad u = \frac{\mu}{k},$$

la dérivée de A étant prise par rapport à $\frac{k}{\mu} = u$.

Donc

$$(95) \qquad A = C \frac{\sqrt{\mu}}{(\mu^2 - k^2)^{\frac{1}{4}}},$$

C étant une constante à définir; elle est réelle: en effet, pour $u \to k$,

$$\mathcal{I}m(I) \to -\int_1^{\infty} \frac{\cos k\rho t \cos k\rho\sqrt{t^2-1}}{\sqrt{t^2-1}} dt$$

qui est bien défini et a pour valeur $-\frac{\pi}{2}$.

Pour calculer C, on calcule directement $R_e(I)$ quand non seulement

$$k\rho \gg 1 \quad \text{et} \quad \mu\rho \gg 1,$$

mais encore

$$\mu \gg k.$$

$R_e(I)$ a pour expression

$$(96) \qquad Re(I) = \int_0^{\infty} \frac{\cos k\rho\sqrt{1+\lambda^2} \cos\mu\rho\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} du.$$

On décompose cette intégrale en deux en exprimant le produit des cosinus comme somme de deux consinus et en effectuant successivement les changements de variable

$$\mu\rho z = \mu\rho\lambda \pm k\rho\sqrt{1+\lambda^2}.$$

Il est facile de voir alors que pour $\frac{k}{\mu} \ll 1$ cette intégrale diffère infiniment peu de

$$(97) \qquad Re(I) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-\mu\rho}}{\sqrt{\mu\rho}}.$$

Dès lors

$$(98) \qquad C = \sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

d'où l'expression finale de I

$$(99) \qquad I \simeq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(\mu^2 - k^2)^{\frac{1}{4}}} \frac{e^{-\rho\sqrt{\mu^2-k^2}}}{\sqrt{\rho}}.$$

Les autres intégrales définies (53) à (56) qui apparaissent au cours du calcul sont alors automatiquement calculées.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] A. LEBLOND et G. MOURIER, *Étude des lignes à barreaux à structure périodique* (*Ann. Radio-électr.*, t. IX, n° 36, avril 1954).

[2] A. LEBLOND et G. MOURIER, *Étude des lignes à barreaux à structure périodique* (*Ann. Radio-électr.*, t. IX, n° 38, octobre 1954).

ARTICLES PUBLIÉS, AU COURS DE L'ANNÉE 1954, PAR LES COLLABORATEURS DU GROUPE EN DEHORS DES ANNALES DE RADIOÉLECTRICITÉ

Sur la propagation et le rayonnement des ondes électromagnétiques le long d'une ligne diélectrique à caractéristiques variables, par J. C. Simon et G. Weill (*C. R. Acad. Sc.*, t. 238, 1954, p. 57-59).

Les auteurs étudient le rayonnement d'une ligne présentant des hétérogénéités locales (variations de diamètre par exemple). La méthode de calcul, déduite de la notion d'harmonique d'espace, est basée sur les perturbations apportées à l'onde se propageant sur une ligne uniforme.

Causes diverses de diaphonie dans les systèmes multiplex à impulsions, par J. Fagot (*Onde Électrique*, janvier 1954, p. 21-31).

L'auteur rappelle tout d'abord brièvement les principes généraux des systèmes multiplex à impulsions et les divers genres de modulation utilisés : d'amplitude, de durée, de position. Il montre que les bruits de diaphonie proviennent de résidus d'amplitude empiétant sur les voies qui succèdent à la voie perturbatrice.

Il étudie, en premier lieu, la diaphonie qui dans les amplificateurs directs du spectre vidéo des impulsions, provient de la distorsion sur la transmission des très basses fréquences, en introduisant la notion de « perturbation de diaphonie ».

Il envisage ensuite la diaphonie provenant de la mauvaise transmission des composantes à haute fréquence du spectre de modulation, soit dans les amplificateurs à vidéo directe, soit dans les amplificateurs de haute fréquence modulée. Il montre que les résidus sont produits par des traînages placés derrière les impulsions.

Impulsions de Gauss, par J. P. Vasseur (*Onde Électrique*, février 1954, p. 139-142).

L'auteur étudie un filtre très simple à résistances-capacités qui permet de transformer une impulsion très fine en une impulsion aussi voisine que l'on veut d'une impulsion de Gauss. L'équivalent passe-bande de ce filtre est constitué par un amplificateur à circuits accordés simples tous alignés sur la même fréquence.

Une méthode simple permet de déterminer la distorsion d'une impulsion de Gauss dans le cas de la transmission en modulation de fréquence au moyen de dispositifs imparfaits. On doit augmenter légèrement la largeur de bande de la liaison pour éviter la diaphonie entre impulsions successives introduite par cette distorsion.

L'emploi des impulsions de Gauss semble particulièrement désirable pour les liaisons multiplex à modulation par impulsions.

Phénomènes fondamentaux dans les tubes à onde progressive, par R. Warnecke, P. Guénard et O. Dœhler (*Onde Électrique*, avril 1954, p. 323-338).

Dans cet article, les auteurs rappellent d'abord l'origine des divers types de tubes à onde progressive : amplificateur à onde progressive « ordinaire » et « magnétron » et oscillateurs « carcinotron » correspondants. Ils esquissent ensuite la théorie de ces divers types de tube en s'efforçant de mettre en évidence les éléments communs et les différences qui existent entre les tubes des divers types, tant en ce qui concerne le mécanisme de leur fonctionnement que leurs caractéristiques.

Sur quelques récents développements dans le domaine des tubes électroniques spéciaux pour ultra haute fréquence, par R. Warnecke (*J. Phys. Rad.*, t. 15, n° 4, 1954, p. 5 S).

Description succincte des résultats obtenus récemment avec les tubes hyperfréquence : klystrons à large bande passante, klystrons millimétriques, nouveaux circuits de magnétrons, amplificateurs à onde progressive, carcinotron.

Intérêt et conception des tubes électroniques de sécurité, par G. Henry-Bezy (*Docaéro*, mai 1954, p. 45-54).

La notion de « garantie » : sa nécessité. Détermination et définition d'un facteur de garantie. Élaboration de cahiers des charges précisant la nature des tests efficaces.

Étude des défauts classiques : pannes électriques, pannes mécaniques, défaillances des filaments, défauts de verrerie.

Nomenclature des essais : gamme classique, essais spéciaux, essais de durée, essais d'homologation.

Construction et fabrication des tubes de sécurité : nécessité d'un contrôle continu en cours de fabrication. Aménagement spécial des ateliers. Formation spéciale du personnel.

Les problèmes principaux : problèmes de verrerie. Émission électronique. Structure des tubes de sécurité

Conclusion : justification de leur fabrication par les résultats acquis dans le domaine de la sécurité.

La découverte de Wehnelt. L'évolution des conceptions sur le mécanisme de l'émission thermoélectronique des « cathodes à oxydes », par R. Warnecke (Congrès International du Cinquantenaire de la cathode à oxydes, *Le Vide*, mai 1954, p. 8-12).

Séance d'ouverture du Congrès. Après un bref historique situant la découverte de Wehnelt M. R. Warnecke rappelle quelques-uns des faits qui ont marqué le développement des cathodes à oxydes. Il donne un aperçu des applications de cette découverte. Quatre grandes périodes sont à distinguer dans l'évolution des conceptions sur le mécanisme d'émission de la cathode à oxydes : la première, celle de la préconception s'étendant de la découverte de Wehnelt jusqu'en 1925; la deuxième allant jusqu'en 1930 où l'attention est retenue par la présence incertaine d'un film monoatomique de Ba; la troisième aboutissant à un modèle de semi-conducteur en équilibre; et enfin, la dernière où se trouvent introduits des donneurs mobiles.

Quelques aspects de la métallurgie du nickel pour cathodes thermoélectriques, par N'Guyen Thien Chi (Congrès International du Cinquantenaire de la cathode à oxydes, *Le Vide*, mai 1954, p. 33-41).

Résultats des travaux du Comité Cathodes permettant la classification et la spécification des différentes catégories de nickel pour cathodes à oxydes. L'auteur expose deux procédés métallurgiques s'appliquant avantageusement à l'élaboration du nickel et de certains de ces alliages : d'une part, la métallurgie des poudres, d'autre part, la fusion sous vide poussé.

Problèmes posés par le recouvrement par pulvérisation des cathodes à oxydes, par J. Schweitzer (Congrès International du Cinquantenaire de la cathode à oxydes, *Le Vide*, mai 1954, p. 81-89).

L'exposé est une mise au point de notions déjà connues, et s'attache surtout au phénomène de l'ahérence du dépôt et de sa texture, ainsi qu'aux conséquences que peuvent avoir ces facteurs sur le comportement des tubes. Les questions touchant aux réalisations matérielles des installations sont développées du fait de l'influence qu'elles peuvent avoir sur les investigations dans le domaine des cathodes.

Amplification d'ondes électroniques due au déplacement d'un faisceau électronique dans un espace à champs électrique et magnétique croisés limité par des parois résistives, par MM. O. Dœhler et G. Guilbaud (*C. R. Acad. Sc.*, t. 238, 1954, p. 1784-1788).

L'amplification est étudiée dans le cas où le faisceau d'électrons se déplace entre des parois planes et parallèles perpendiculairement à des champs électrique et magnétique croisés. Les trajectoires sont supposées rectilignes si l'on néglige les effets de la charge d'espace continue.

Les auteurs calculent la constante de propagation dans le cas où les parois sont de même nature ou si l'une des parois est conductrice.

Les thermistances, leurs utilisations ..., par J. Bleuze (*Ingénieurs et Techniciens*, juin 1954, p. 9-14).

L'auteur étudie la constitution et la fabrication des thermistances qui sont présentées sous formes fondamentales : thermistances plaques, cylindriques, perles. Après avoir envisagé leurs caractéristiques « résistances-températures » et leurs paramètres thermiques, il passe en revue leurs applications nombreuses et variées : thermométrie électrique, compensation des dérives thermiques, pyrométrie optique, régulation de tension, mesure des pressions des gaz, temporisation, chauffage progressif des filaments, démarrage des moteurs, mesure des puissances électriques en haute fréquence.

Détection d'une onde hertzienne par une ferrite, par J. C. Simon et G. Broussaud (*C. R. Acad. Sc.*, t. 238, 1954, p. 2294-2296).

Les propriétés non linéaires des ferrites permettent de détecter des ondes électromagnétiques même de courtes longueurs d'onde (3 à 10 cm). Les auteurs mettent en évidence le phénomène de détection par l'intermédiaire des propriétés magnétostrictives de certaines de ces ferrites.

Comparaison des modulations codées et des modulations classiques, par J. P. Vasseur (*Onde Électrique*, juin 1954, p. 509-514).

Sans prétendre apporter de faits nouveaux, cette étude essaie de faire le point des systèmes de modulation codée et de déterminer dans quels cas il faut les employer ou utiliser des systèmes plus classiques.

Après un rappel des propriétés et des moyens de réaliser la modulation par impulsions codées et les modulations en delta à simple et double intégrations, l'auteur établit une comparaison avec les modulations plus couramment utilisées dans les multiplex en examinant l'efficacité du système et la quantité de matériel à mettre en œuvre.

La conclusion est que les systèmes codés permettent de réaliser des liaisons particulièrement difficiles mais que dans la plupart des cas pratiques, les systèmes à courants porteurs ou à impulsions modulées en amplitude ou en position fournissent d'excellentes solutions plus économiques en argent et en largeur de bande.

Généralités sur les éléments non linéaires, par P. Aigrain (*Onde Électrique*, juillet 1954, p. 555-558).

L'auteur donne une classification des éléments non linéaires qui est la généralisation naturelle de celle des éléments linéaires.

Les types d'application de chaque espèce d'élément non linéaire sont ensuite passés en revue. Il souligne la difficulté d'obtenir une solution analytique des équations du circuit.

L'application des faisceaux hertziens aux techniques du radar, des multiplex et de la télévision, par R. Aubert (*Rev. gén. Electr.*, juillet 1954, p. 348-363).

Après un bref rappel historique sur le développement de la radioélectricité et sur la naissance de l'électronique, l'auteur expose quelques généralités sur les faisceaux hertziens. Il examine ensuite successivement leurs applications au radar, aux communications multiplex et à la télévision. Il énumère les différents types de radar, et les avantages et inconvénients des câbles hertziens.

Quelques possibilités de la métallurgie des poudres dans le domaine de l'aéronautique, par N'Guyen Thien Chi (*Métaux*, juillet-août 1954, p. 268-291).

Après quelques considérations sur les possibilités et limites de la métallurgie des poudres, l'auteur passe en revue les différents matériaux : métaux réfractaires, alliages lourds, titane, cermets, semi-conducteurs, puis considère leurs applications : coussinets poreux, pièces de friction, contacts électriques frittés.

La nature des donneurs à l'intérieur des couches d'oxydes. Calcul de leur énergie de dissociation, par J. Ortusi (Congrès International du Cinquantenaire de la cathode à oxydes, *Le Vide*, juillet-septembre 1954, p. 100-105).

Cet article se rapporte à certaines hypothèses sur la nature des donneurs à l'intérieur des couches d'oxydes ainsi qu'au calcul du travail de sortie interne que l'on peut effectuer à partir de ces hypothèses.

Les antennes incorporées, par G. Boissinot (*Docaéro*, septembre 1954, p. 43-48).

L'auteur étudie la constitution des antennes dans les diverses gammes de fréquences :

Aériens de 2 à 20 Mc/s. Fils d'antenne : adaptation, insuffisances. Antennes incorporées dans les ailes : adaptation; excitation; rendement; réalisations effectives.

Aériens de 100 à 300 Mc/s. Antennes incorporées dans les dérives; antennes placées dans les cavités.

Aériens de plus de 300 Mc/s. Fentes rayonnantes. Considérations théoriques sur les analogies : antennes-fentes; cavités-guides d'onde. Installation à bord des diverses antennes : diagrammes omnidirectionnels et rayonnements dirigés; association des fentes pour l'adaptation du rayonnement à un usage prévu.

Les diélectriques céramiques pour condensateurs, par A. Danzin (Conférence faite au Congrès International de Céramique en mai 1952 et publiée par la *Société française de Céramique* dans le Livre du Congrès 1952, en octobre 1954).

Rôle joué par la céramique dans la construction des condensateurs électriques. Comparaison avec les diélectriques anciens, mica, papier, plastique, air, vide, huile.

Après avoir étudié les propriétés des diélectriques céramiques nouveaux :

— Diélectriques à coefficient de température précis;
— Diélectriques à haut pouvoir inducteur spécifique;
— Propriétés de piézoélectricité et de ferroélectricité.

L'auteur présente quelques formes de réalisation :

— Présentation de quelques modèles de condensateurs étudiés pour les besoins de l'Électronique moderne;
— Caractéristiques, performances;
— Comparaison des performances avec celles des modèles de condensateurs construits pour le même usage mais à partir de diélectriques non céramiques.

Application de la méthode de diffraction des électrons à l'étude de la structure de l'argile et des produits céramiques en général, par R. Lecuir (Conférence faite au Congrès International de Céramique en mai 1952 et publiée par la *Société Française de Céramique* dans le Livre du Congrès 1952, en octobre 1954).

Description d'applications de la diffraction électronique résultant de la possibilité de déterminer la composition des couches superficielles et celle des cristallites de très petites dimensions aux matières premières céramiques; étude du rapport des dimensions des cristallites avec le retrait céramique; enrobage au cours du broyage; orientation des particules lamellaires dans les agglomérés; décomposition de la kaolinite, montrant la persistance des grandes lignes du réseau initial jusqu'à 900°; la formation d'Al_2O_3 résultant de la décomposition du réseau avant la formation de la mullite à 1100° paraît être une interprétation du désordre du réseau; application de la diffraction électronique à la détermination du seuil de réaction à la surface de contact de deux solides; examen des surfaces de ruptures mécaniques et détermination de leur composant.

Sur la possibilité d'obtenir des ondes entretenues très courtes en utilisant un klystron reflex donnant de l'énergie sur des fréquences harmoniques d'ordre élevé de l'oscillation fondamentale, par MM. J. Bernier et H. Leboutet (*C. R. Acad. Sc.*, t. 239, 1954, p. 796-798).

Les auteurs donnent les résultats indiquant les régions où ils ont effectivement obtenu de l'énergie harmonique, avec des tubes munis des dispositifs de couplage convenables à la fois pour l'énergie fondamentale et pour l'énergie harmonique, avec des puissances de l'ordre de quelques dizaines de microwatts dans les conditions proposées.

Fünfzig Jahre Oxydkathoden (*Le cinquantenaire de la cathode à oxydes*), par R. Warnecke (*E. T. Z.*, 11 octobre 1954, p. 677-680).

Traduction en allemand de la Communication présentée par l'auteur à la séance d'ouverture du Congrès International du Cinquantenaire de la cathode à oxydes et donnée dans la revue du *Vide* de mai 1954.

Émetteur de télévision de Strasbourg, par J. Polonsky (*Onde Électrique*, novembre 1954).

Cet article décrit l'émetteur de télévision 3 kW de Strasbourg, installé par la Compagnie Générale de T. S. F. en septembre 1953.

Il décrit les caractéristiques essentielles de cet émetteur, ainsi que les équipements annexes, notamment : l'aérien, le filtre d'atténuation de bande, le duplexeur, les antennes fictives, etc.

Cet émetteur est le premier d'une série construite par la Compagnie Générale de T. S. F. (émetteurs de 3 et 20 kW), répondant aux nouveaux cahiers des charges de la Radiodiffusion-Télévision française.

Une baie de maintenance, groupant un ensemble d'appareils de contrôle et de mesure (un générateur de signaux types, un wobbulateur video, une mire électronique, un démodulateur et un analyseur de spectre, des récepteurs de contrôle pour la vision et les appareils classiques de contrôle du son), permet une maintenance aisée de l'émetteur en question.

Équipement léger de relais hertzien sur ondes centimétriques, par J. Polonsky (*Onde Électrique*, novembre 1954).

Cet article décrit le nouveau relais C. S. F. sur ondes centimétriques, type TM. 100 et TM. 110 (respectivement 100 mW et 1 W) à usage fixe ou mobile, permettant une transmission simultanée de l'image et du son.

Le faisceau hertzien P. T. T. GD 101 *comme artère de distribution de télévision à haute définition*, par J. Verrée et P. Magne (*Onde Électrique*, novembre 1954, p. 876-882).

Les auteurs rappellent les caractéristiques principales du GDH 101, qui constitue le premier faisceau français de la gamme de 8 cm de longueur d'onde. Ils donnent une énumération des liaisons à grande distance réalisées en matériel GDH, et traitent de la qualité de transmission obtenue sur ces liaisons.

Un nouveau type d'aérien et son application à la transmission de télévision à grande distance, par J. C. Simon et V. Biggi (*Onde Électrique*, novembre 1954, p. 883-896).

Au cours de l'essai de transmission du programme de télévision de Paris à Tours et Angers au printemps 1954, un nouveau type de projecteur d'onde baptisé l' « Antenne Cigare » a été expérimenté. Dans cet article, les auteurs exposent la théorie et les caractéristiques pratiques de cet aérien, et décrivent différents essais de propagation à grande distance des signaux de télévision, et en particulier les essais récents de Fontaine Raoul.

Realizaciones recientes en tubos electronicos por frequencias ultra elevadas, par R. Warnecke (*Instituto Nacional de Electronica*, Madrid, 1954, p. 126).

Cette étude se propose deux buts, donner un aperçu des développements récents obtenus dans le domaine des tubes électroniques dans les laboratoires de la Compagnie Générale de T. S. F. et analyser les principales caractéristiques, et les possibilités que présentent deux nouvelles réalisations :

— l'amplificateur d'onde progressive du type magnétron;
— l'oscillateur du type « Carcinotron ».

En ce qui concerne les tubes basés sur des principes connus, l'auteur se borne à donner de brèves descriptions, et à rappeler quelques résultats particuliers de façon à pouvoir les comparer aux nouvelles réalisations.

Propriétés des cathodes chaudes des tubes hyperfréquences, par D. Charles et H. Huber (Congrès International du Cinquantenaire de la cathode à oxydes, *Le Vide*, novembre 1954, p. 224-233).

Dans cet exposé, les auteurs mettent en évidence le rôle important que peut jouer la cathode dans les tubes électroniques pour hyperfréquences. Ils signalent même que certains types de tubes nouveaux n'ont pu être développés techniquement qu'à partir du moment où de nouvelles cathodes ont été créées et mises au point.

Exemples de réalisation de cathodes chaudes pour tubes hyperfréquences, par H. Huber et D. Charles (Congrès International du Cinquantenaire de la cathode à oxydes, *Le Vide*, novembre 1954, p. 234-243).

Dans cet article, qui fait suite au précédent, les auteurs effectuent un examen détaillé et critique des différentes cathodes existantes ainsi que de leurs différentes propriétés.

Après avoir considéré dans une première partie les cathodes de structure simple, ils envisagent, dans la deuxième partie, les cathodes de structure complexe et proposent un essai de leur classification.

Dans une troisième partie, enfin, ils donnent les résultats qu'ils ont obtenu dans la réalisation de nouvelles cathodes spéciales.

Cathodes pour magnétrons, par A. Dubois (Congrès International du Cinquantenaire de la cathode à oxydes, *Le Vide*, novembre 1954, p. 244-248).

Par suite du bombardement et de l'émission secondaire qui résultent du fonctionnement, la cathode d'un magnétron a un comportement qui lui est propre. Grâce à leur émission secondaire, les cathodes à oxydes sont particulièrement adaptées aux magnétrons.

Conditions imposées aux cathodes chaudes des tubes électroniques, par Ch. Dufour et G. Wendt (Congrès International du Cinquantenaire de la cathode à oxydes, *Le Vide*, novembre 1954, p. 249-252).

La transposition en optique électronique des relations d'Abbe et de Lagrange-Helmholtz, permet d'établir une relation simple entre les paramètres définissant le spot d'un tube cathodique d'une part et les conditions d'utilisation de la cathode : charge et température d'autre part. Les auteurs discutent ensuite cette relation pour mettre en évidence les limitations théoriques dans les tubes actuels et l'amélioration des performances par l'emploi de nouvelles cathodes. La fin de l'exposé est consacrée aux exigences technologiques.

Quelques travaux préliminaires sur des cathodes dites « concrétées à base de sels de baryum », par H. Huber et J. Freytag (Congrès International du Cinquantenaire de la cathode à oxydes, *Le Vide*, novembre 1954, p. 310-316).

Les auteurs montrent l'utilité des cathodes dites « concrétées à base de sels de baryum » pour les tubes où une densité de courant élevée joue un rôle primordial. Ils montrent qu'il existe beaucoup de mélanges émissifs et ils mettent en évidence l'influence d'un frittage préalable, facteur important pour doser l'apport du Ba suivant le régime de la cathode.

Cathodes thermoélectroniques frittées, directement émissives, par N'Guyen Thien Chi et P. Dussaussoy (Congrès International du Cinquantenaire de la cathode à oxydes, *Le Vide*, novembre 1954, p. 297-301).

Étude d'un mélange intime de poudre de nickel et de poudre de carbonate alcalinoterreux mixte. Pressage à froid du mélange sous forme de cathodes finies ou d'échantillons destinés à l'usinage. Frittage dans l'hydrogène vers 1000° C. Usinage éventuel des pièces frittées pour les transformer en cathodes.

Ce mélange présente les avantages suivants :

Même avec 20 % de carbonate, les pièces frittées sont très robustes et ont l'aspect métallique : leur usinage s'effectue sans aucune difficulté.

Les cathodes usinées ont une forme géométrique rigoureuse, des cotes très précises et une surface parfaite.

L'émission électronique est favorisée par l'importance de la réserve de carbonate et par une certaine porosité de la masse.

A la température de travail qui ne dépasse pas 900° C, il ne se produit pas de métallisation interne.

Les auteurs donnent comme résultat d'essais, des courbes montrant la variation de l'émission d'une diode en fonction :

— du temps;
— de la température de travail;
— de la tension anodique.

Les matériels diélectriques pour très hautes fréquences dans la technique électronique moderne, par A. Danzin (Conférence faite à Milan le 14 avril 1954 à l'occasion du Symposium d'Électronique et de Télévision et publiée dans le Livre du Congrès 1954 italien réunissant l'ensemble des Communications faites).

Les diélectriques se rencontrent partout dans la construction des matériels radioélectriques, soit comme matériaux isolants, soit comme éléments fondamentaux de la construction des condensateurs.

Une rapide revue du rôle qu'ils sont amenés à jouer volontairement ou accidentellement dans les pièces détachées et les circuits électroniques conduit à un classement par propriétés et l'auteur indique l'importance des différents paramètres physiques qui caractérisent un diélectrique.

Les performances d'un certain nombre de matériaux sont ensuite examinés : matières plastiques, verres, céramiques. Les propriétés électriques sont rapprochées des phénomènes physico-chimiques qui président à la construction des matériaux.

L'auteur quitte ensuite le point de vue du spécialiste pour aborder le problème sous l'angle où le voit l'ingénieur qui ne peut pas se contenter de renseignements sur les propriétés électriques, mais doit embrasser l'ensemble des connaissances sur le prix des matériaux, le coût de leur élaboration, leur comportement en présence de contraintes mécaniques et climatiques diverses, de variations de température et de pression, etc.

Quelques exemples pratiques de solutions industrielles sont donnés en conclusion.

SOMMAIRE

Imp. GAUTHIER - VILLARS

55, Quai des Grands-Augustins, PARIS

146627

Dépôt légal, Imprimeur, 1955, n° 1010

Le Gérant : L. P. BOULANGER.

